RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

DR. JULJUSZ RUDNICKI
PROF. NADZW. POLIT. WARSZAW.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

CZĘŚC DRUGA

FUNKCJE I POCHODNE

Z 7 RYSUNKAMI

1 9 2 4

NAKŁADEM TRZASKI, EVERTA I MICHALSKIEGO
WARSZAWA, HOTEL EUROPEJSKI

CZCIONKAMI DRUKARNI NARODOWEJ W KRAKOWIE

SPIS RZECZY

Własności i zastosowanie pochodnych. Badanie funkcji.

Szeregi, których wyrazy są funkcjami zmiennej niezależnej.

Szeregi potęgowe.

PRZEDMOWA

Całość „Rachunku różniczkowego i całkowego“, którego część druga ukazuje się obecnie, składać się będzie z czterech części; część pierwsza, zawierająca ciągi i szeregi, wyszła już rok temu.

Podręcznik niniejszy z małemi dopełnieniami zawiera treść wykładów moich dla słuchaczy Wydziału Mechanicznego Politechniki Warszawskiej. Część druga, która obecnie ukazuje się w druku, poświęcona jest pojęciu funkcji i pojęciu pochodnej (jednej i wielu zmiennych), Część trzecia zawierać będzie rachunek całkowy wraz z dopełnieniami geometrycznemi (łuk, krzywizna i t. p.), a część czwarta — krótki rys funkcyj analitycznych i wiadomości o równościach zwyczajnych i o pochodnych cząstkowych. Pierwsze trzy części oparte są całkowicie tylko na pojęciu liczby rzeczywistej, w czwartej dopiero wprowadzam pojęcie liczby zespolonej.

Pragnę na tem miejscu złożyć podziękowanie Panu prof. Dr. Wilkoszowi, którego cenne uwagi przyczyniły się do ulepszenia treści wykładu niektórych działów tego podręcznika. Z powodów, niezależnych od autora, nie udało się uniknąć licznych błędów zecerskich, upraszam więc czytelnika o łaskawe poprawienie ich według załączonego na końcu książki spisu.

Piaseczno, sierpień 1924

Juljusz Rudnicki.

CZĘŚĆ DRUGA.

FUNKCJA.

61. *Pojęcie funkcji.* Pojęcie funkcji sprowadza się w istocie rzeczy do odpowiedniości między dwoma zbiorami. Oznaczmy przez (X) i (Y) dwa zbiory i niech x będzie dowolną liczbą pierwszego zbioru; liczby drugiego zbioru będziemy oznaczali przez y. Jeżeli każdej wartości x zbioru (X) odpowiada jedna ściśle określona liczba y drugiego zbioru, to przez tę odpowiedniość ustanowiony został pewien związek między wartościami x i y zbiorów (X) i (Y). Dla oznaczenia tego związku używamy słowa: *funkcja* i mówimy: „y jest funkcją zmiennej x", przyczem ta funkcja jest określona tylko dla wartości zmiennej x, należących do zbioru (X).

Każdej liczbie x zbioru (X) odpowiada jedna tylko liczba y zbioru (Y); ale różnym liczbom x może odpowiadać jedna i ta sama wartość liczbowa y, czyli jednej i tej samej wartości liczbowej y może odpowiadać więcej niż jedna wartość liczbowa x, t. j. odpowiedniość między zbiorami (X) i (Y) niekoniecznie jest odwracalnie jednoznaczna, t. j. niekoniecznie doskonała. Widzimy więc, że zbiory (X) i (Y) elementów x i y, które nazywać będziemy „zmiennemi" nie grają tej samej roli: każdemu x odpowiada jedno tylko y, lecz niekoniecznie odwrotnie. Tę różnicę jeszcze bardziej uwydatniamy, uważając, iż zbiór

(X) dany nam jest bezpośrednio, gdy tymczasem zbiór (Y) wynika już z samej zależności i jest określony, jako zbiór tych wartości liczbowych y, które odpowiadają wartościom x zbioru (X). Zbiór (X) bywa najczęściej jakimś prostym zbiorem wszystkich liczb całkowitych przedziału (a, b), zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych i ujemnych i t. p. Dla zaznaczenia różnicy między x i y, zmienną x nazywamy „zmienną niezależną“, a zmienną y — „zmienną zależną“.

Dla oznaczenia, że y jest funkcją zmiennej niezależnej x, używamy symbolów $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $x=F(x)$, i t. p. Zależność między y i x wyrażona jest najczęściej przy pomocy wzoru analitycznego, ale samo pojęcie zależności funkcjonalnej, tak jakeśmy je określili, nie zależy od tego, czy wzór analityczny, wyrażający tę zależność jest nam znany, albo nawet czy wogóle istnieje.

Zbiory (X) i (Y) mogą być także zbiorami odcinków albo też punktów na dwóch osiach, przyczem na każdej z tych dwóch osi musi być ustalony punkt początkowy. W takim razie każdemu punktowi P na pierwszej osi będzie odpowiadał jeden tylko punkt Q na drugiej osi. Taka zależność może być określona za pomocą konstrukcji geometrycznej, która pozwala konstrukcyjnie wyznaczyć punkt Q, o ile punkt P jest dany. Na mocy odpowiedniości doskonałej między liczbami rzeczywistemi, a punktami na prostej, pojęcie takiej zależności, określonej geometrycznie, niczem nie różni się w istocie od zależności, określonej poprzednio.

Przykłady: 1) Niech $y=a$, gdzie a jest liczbą daną (stałą), np., zero albo jeden, przyczem ta sama wartość a ma odpowiadać każdej wartości zmiennej x. Związek funkcjonalny między y i x polega właśnie na tem, że każdej wartości x odpowiada jedna i ta sama wartość zmiennej y tak, iż zbiór (Y) sprowadza się do jednego

tylko elementu a. *Tego rodzaju funkcja zmiennej x nazywa się stałą.* Zbiór (X) w tym przykładzie jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.

2) Funkcja może być określona tylko dla wartości dodatnich i całkowitych zmiennej x, t. j. dla $x=1, 2, 3,\ldots, n,\ldots$ Zbiór (X) jest wtedy zbiorem liczb ciągu naturalnego. Taką zmienną będziemy oznaczali przez n, a funkcję przez $f(n)$. Z funkcją zmiennej n mieliśmy już do czynienia przy ciągach, albowiem każdy wyraz a_n ciągu jest funkcją wskaźnika n, który jest liczbą całkowitą, tak iż właściwie $a_n=f(n)$.

Z funkcjami tego rodzaju mamy także do czynienia w teorji liczb; taką jest, np. funkcja $\varphi(n)$, która wyraża ilość liczb pierwszych mniejszych od liczby n.

3) Funkcja może być określona tylko dla wartości x należących do pewnego przedziału. Tak np. $y=\sqrt{1-x^2}$ jest przez ten wzór określona tylko w przedziale $(-1, +1)$. Funkcja może być określona przy pomocy kilku wzorów, z których każdy stosuje się do wartości x należących do innego przedziału częściowego, tak np., funkcję możemy określić przy pomocy następujących warunków: gdy $x\leqslant -1$, to $y=1$; gdy x zawarte jest w przedziale $(-1, 1)$, $y=x^3-x+1$; gdy $x\geqslant 1$, $y=1$. Jako inny przykład, służyć może funkcja Kroneckera $\operatorname{sign} x$ (czytaj signum x); funkcja ta równa się -1, gdy $x<0$; dla $x=0$, funkcja równa się 0; dla $x>0$, $\operatorname{sign} x$ równa się $+1$.

4) Funkcja $y=\frac{1}{x}$ określona jest przez ten wzór dla wszystkich wartości x, z wyjątkiem $x=0$; jeśli dodatkowo zaznaczamy, że dla $x=0$, y równa się jakiejś liczbie a, dajmy nato zeru, to otrzymamy funkcję, określoną dla wszystkich wartości x. To samo stosuje się do funkcji $y=\frac{x^2}{x}$ albo $y=\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$, przytem ten ostatni wzór nie

wyznacza wartości y dla $x=0$, ale również i dla $x=1$ i dla $x=-1$. Zauważyć należy, że żadnych wartości nie otrzymujemy tu dla y przy tych wartościach x, gdyż wyrażenia $\frac{1}{0}$ i $\frac{0}{0}$ i które otrzymujemy przez bezpośrednie podstawienie *są absolutnie pozbawione sensu*, gdyż iloraz dwóch liczb jest w Matematyce określony wtedy i tylko wtedy, gdy dzielnik nie równa się zeru. Również błędnem jest twierdzenie, że $\frac{1}{0}$ oznacza wartość nieskończoną, albo że $\frac{0}{0}$ wyraża wartość nieoznaczoną; do tej sprawy powrócimy niebawem przy badaniu przebiegu zmienności funkcji i przy pojęciu granicy.

Jako przykłady funkcji podamy jeszcze: y równa się dla każdego x wartości bezwzględnej x. (a dla $x=0$, $y=0$); funkcję tą oznaczamy przez $|x|$, czyli $y=|x|$; łatwo sprawdzić, iż $|x|=x \, . \, \text{sign}\, x$. Inną funkcją ciekawą jest $y=E(x)$, którą spotykamy w analitycznej teorji liczb; dla każdej wartości x funkcja $E(x)$ ma wartość równą największej liczbie całkowitej, nie większej od x; gdy $-1 \leqslant x < 0$, to $E(x)=-1$; gdy $0 \leqslant x < 1$, to $E(x)=0$; gdy $1 \leqslant x < 2$, to $E(x)=1$ i t. d. Radzimy czytelnikowi zastanowić się nad funkcjami: $y=x-E(x)$; $y=E(x^2)$; $y=\{E(x)\}^2$ i t. p.

5. Funkcja może być określona tylko dla wartości x należących do pewnego zbioru (X). W poprzednio podanych przykładach (X) stanowił bądź to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych pewnego przedziału (a, b), bądź to wreszcie zbiór liczb całkowitych.

Niech y równa się liczbie czynników pierwszych liczby $\log_2 x$; funkcja ta jest określona tylko dla wartości $x=2^n$, gdzie n równa się liczbie całkowitej lub zeru, czyli zbiór X stanowi ogół liczb postępu geometrycznego $\ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots$

Niech y równa się $\dfrac{1}{mn}$, gdy x równa się ułamkowi

nieskracalnemu $\frac{m}{n}$: funkcja ta jest określona tylko w zbiorze liczb wymiernych różnych od zera.

Jako ostatni przykład, polecamy czytelnikowi zastanowienie się nad następującą funkcją: niech x oznacza dowolną liczbę przedziału (0, 1); przedstawmy x w postaci ułamka dziesiętnego, przyczem, jeśli x posiada rozwinięcie na ułamek dziesiętny skończony, to należy wziąć właśnie to rozwinięcie i dopełnić zerami, by otrzymać ułamek nieskończony; niech m oznacza ile razy powtarza się symbol 0 śród n kolejnych cyfr dziesiętnych rozwinięcia liczby x na ułamek dziesiętny; jeżeli istnieje granica $\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$, to granica ta ma być właśnie wartością funkcji, odpowiadającą danej wartości x. Funkcja ta określona jest tylko dla tych wartości x, które należą do przedziału (0, 1) i dla których istnieje granica $\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$.

62. Niech $y = f(x)$ oznacza funkcję, określoną dla wartości x należących do zbioru (X); funkcja ta jest dla wartości x należących do (X) ograniczona od góry, lub od dołu, jeśli zbiór (Y) wartości, które ta funkcja przyjmuje jest ograniczony od góry, ewentualnie od dołu. Jeżeli funkcja jest ograniczona od góry, to zbiór (Y) jest ograniczony od góry; lecz każdy zbiór, ograniczony od góry, posiada kres górny K; kres górny zbioru (Y) nazywa się kresem górnym omawianej funkcji. Jeżeli, np., funkcja $f(x)$, ograniczona od góry, jest określona, np. w przedziale (a, b), to kres górny K jest liczbą, posiadającą własności następujące, wyznaczające w zupełności tę liczbę (patrz I. 40): dla każdej wartości x przedziału (a, b) spełniona jest nierówność

$$f(x) \leqslant K;$$

pośród wartości x przedziału (a, b) istnieją takie wartości x, które spełniają nierówność

$$f(x) > K - \varepsilon,$$

gdzie ε jest liczbą dodatnią, zresztą dowolnie małą. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona od dołu, to posiada kres dolny k; jest to kres dolny zbioru wartości (Y), które przyjmuje funkcja. Dla wszystkich wartości x, dla których $f(x)$ jest określone, zachodzi nierówność

$$f(x) \geqslant k;$$

pośród tych wartości x są takie, dla których zachodzi nierówność

$$f(x) < k - \varepsilon.$$

Funkcja może być ograniczona od góry i od dołu i wtedy posiada kres górny i dolny.

Zauważymy, że funkcja może być wyznaczona dla każdej wartości x zbioru (X), a jednak może nie być ograniczoną w tym przedziale. Weźmy dla przykładu funkcję określoną w przedziale $(-1, +1)$ w następujący sposób: gdy $x=0$, to $y=0$; gdy $x \neq 0$, t. j. dla wszystkich pozostałych wartości x przedziału $(-1, 1)$ $y=\frac{1}{x^2}$; jasną jest rzeczą, że ta funkcja posiada wartość liczbową zupełnie wyznaczoną dla każdej wartości x przedziału $(-1, +1)$, a jednak nie jest ograniczona od góry w tym przedziale.

Przedział (k, K) jest najmniejszym przedziałem, wewnątrz którego mieszczą się wszystkie wartości funkcji, przyczem, jeśli pośród wartości funkcji istnieje wartość równa K, to ta wartość K jest maximum funkcji, jeśli wśród wartości funkcji znajduje się wartość równa kresowi dolnemu k, to wartość ta jest minimum funkcji. Łatwo się przekonać, że nie zawsze kres górny jest maximum, a kres dolny minimum; tak np., dla funkcji $y=x-E(x)$ w dowolnym przedziale (a, b), większym od jedności (t. j. $b-a>1$),

kresem górnym jest 1, kresem dolnym jest zero; otóż kres dolny zero jest minimum, gdyż w przedziale (a, b) znajduje się przynajmniej jedna wartość, która jest liczbą całkowitą n, a dla $x = n$, $y = n - E(n) = n - n = 0$; natomiast kres górny 1 nie jest maximum tej funkcji, gdyż niema takiej wartości x, której odpowiadałaby wartość $y = 1$.

Niech funkcja $y = f(x)$ będzie funkcją określoną i ograniczoną (od góry i od dołu) w zbiorze (X), t. j. dla wartości x, należących do zbioru (X). Nazywamy oscylacją funkcji $f(x)$ w zbiorze (X) różnicę między kresem górnym K i kresem dolnym k, t. j. $w = K - k$, przyczem K i k istnieją, gdyż $f(x)$ jest ograniczone. Zbiorem (X) będzie zwykle jakiś przedział (a, b); oscylacją (wahaniem się) funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) jest więc różnica, między kresem górnym a kresem dolnym wartości, które przyjmuje funkcja w przedziale (a, b).

Niech przedział $(a' b')$ stanowi część przedziału (a, b), tak, iż $a \leqslant a' < b' \leqslant b$. Jeżeli funkcja jest ograniczona w przedziale (a, b), to jest oczywiście ograniczona także w przedziale (a', b'), gdyż wartości, które przyjmuje funkcja w przedziale (a', b') są zawarte między wartościami, które funkcja przyjmuje w przedziale szerszym (a, b). Niech K i k oznaczają kresy górny i dolny funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b), a K' i k' — kresy górny i dolny tejże funkcji w przedziale (a', b'). Jasna rzecz, że $K' \leqslant K$, a $k' \geqslant k$; tak więc, jeżeli w oznacza oscylację funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b), a w' oscylację tejże funkcji w przedziale (a', b'), to $w' \leqslant w$.

Udowodniliśmy więc, że przy rozdrobnieniu danego przedziału (a, b) na przedziały częściowe, oscylacja w każdym z przedziałów częściowych nie może przewyższać oscylacji w przedziale pierwotnym (a, b).

Wyłożone tu pojęcie funkcji nie mogło powstać odrazu rzeczywiście jest wynikiem stopniowego i powolnego roz-

woju. Pojęcie zależności, oczywiście, samo narzuca się w matematyce, ale może być zamaskowane, jak, np. w klasycznym Euklidesowym wykładzie własności figur geometrycznych. Pojęcie funkcji zaczęło się rozwijać wraz z rozwojem rachunków analitycznych, ale początkowo rozpatrywano najprostsze wyrażenia, w których wielkości liczbowe związane są najprostszemi działaniami dodawania i mnożenia: mamy już tu zależność wprost i odwrotnie proporcjonalną; następnie zjawiają się potęgi. Wielce się przyczynili do wyjaśnienia i rozszerzenia pojęcia funkcji Leibniz i bracia Bernoulli. Euler daje już następujące określenie: „Functio quantitatis variabilis est expressio analitica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili". Euler utożsamia więc określenie funkcji z wyrażeniem analitycznem. Lecz pogląd ten nie mógł się ostać: poznano wkrótce, że jedno i to samo wyrażenie analityczne, np. szereg trygonometryczny (Fourier) może się równać naprz. $+1$ dla pewnych wartości x, a dla innych wartości x toż samo wyrażenie może się równać naprz. -1. Odwrotnie, przekonano się, iż jedna i ta sama funkcja musi być wyrażona pod taką lub inną postacią tego samego typu, zależnie od wartości x. Tak więc: jednemu wyrażeniu może odpowiadać kilka funkcji, a jednej i tej samej funkcji wiele wyrażeń.

Dirichlet, Cauchy i Riemann są twórcami spółczesnej teorji funkcyj, (zwłaszcza ten ostatni).

63. *Obraz geometrycznej funkcji. Wykres najprostszych funkcji i wykres funkcji „niezwykłych"*.

Już poprzednio (patrz l. 15) wpominaliśmy o odpowiedniości między parą liczb, a punktem na płaszczyźnie. Można urzeczywistnić taką odpowiedniość różnemi sposobami, co do których znaleźć można wiadomości w geometrji analitycznej. Tutaj wystarczy układ współrzędnych prostokątnych.

Wyobraźmy sobie dwie osie prostopadłe, przecinające się w punkcie O, który nazywać będziemy początkiem spółrzędnych; jedna z tych osi nazywa się osią $x^{ów}$ albo odciętych, druga osią $y^{ów}$ albo rzędnych. Na każdej z tych dwuch osi mamy ustalony pewien kierunek, tak zwany kierunek dodatni; oprócz tego musimy sobie ustalić jednostkę długości, od której zależeć będzie skala wykresu.

Każdej liczbie x będzie odpowiadał pewien punkt P na osi odciętych Ox; odwrotnie, każdemu punktowi P na osi odciętych odpowiadać będzie pewna liczba rzeczywista x, dodatnia, ujemna albo zero, zależnie od tego, czy punkt P znajduje się po stronie dodatniej od punktu O, po stronie ujemnej lub w samym punkcie O.

Tak samo każdej liczbie y odpowiadać będzie pewien punkt Q na osi rzędnych Oy; odwrotnie, każdemu punktowi Q na osi rzędnych odpowiadać będzie pewna liczba rzeczywista y. Wynika to z odpowiedniości doskonałej między liczbami, a punktami na prostej.

Dowolnemu punktowi M na płaszczyźnie odpowiadają dwa punkty P i Q, które są rzutami prostokątnemi punktu M odpowiednio na oś odciętych i na oś rzędnych, a więc i dwie liczby x i y, które krótko nazywać będziemy także odciętą i rzędną punktu M; tak więc punktowi M na płaszczyźnie odpowiada para liczb (x, y). Odwrotnie, niech daną będzie para liczb (x, y); liczbie x odpowiada punkt P na osi odciętych, liczbie y punkt Q na osi rzędnych; istnieje na płaszczyźnie jeden i tylko jeden punkt M, który rzutuje się w punktach P i Q na oś odciętych i na oś rzędnych odpowiednio; ten to punkt M, wyznaczony jednoznacznie, odpowiada parze liczb (x, y).

Przypuśćmy, że dana jest pewna funkcja $y = f(x)$, określona w przedziale (a, b). Każdej wartości x należącej do przedziału (a, b), t. j. takiej, że $a \leqslant x \leqslant b$, odpowiadać będzie pewna liczba y; tak więc funkcja nasza jest źródłem

nieskończonego zbioru par liczbowych (x, y). Lecz każdej parze (x, y) odpowiada punkt M. Nasza funkcja jest więc w ten sposób źródłem nieskończonego zbioru punktów na płaszczyźnie. Zbiór tych punktów nazywamy obrazem geometrycznym albo wykresem funkcji. Jeżeli teraz spróbujemy punkty tego zbioru wykreślić na papierze milimetrowym, to przekonamy się, że mogą zajść dwie okoliczności, dwa przypadki, których zresztą ściśle rozgraniczyć nie można: albo punkty naszego obrazu geometrycznego układać się będą w pewną całość, która daje się ująć jako pewna linja geometryczna, choćby nawet i dość złożona: wtedy tylko można mówić właściwie o wykresie funkcji; albo też w miarę wzbogacenia naszego obrazu w nowe punkty, które doń należą, zbiór komplikuje się coraz bardziej, tak iż nie możemy otrzymać żadnego wykresu. Że taka okoliczność istotnie może mieć miejsce, łatwo się przekonać, starając się wykreślić funkcję określoną w sposób następujący: gdy x ma wartość wymierną, $y = +1$; gdy x ma wartość niewymierną, $y = -1$. Gdybyśmy wykreślali te punkty na papierze milimetrowym, o ile punktów tych będzie w pewnym przedziale dla x dostatecznie wiele, otrzymamy dla oka dwie linje proste, równoległe do osi x po jednej i po drugiej stronie tej osi, lecz nie wszystkie punkty tych prostych należałyby do obrazu geometrycznego naszej funkcji, ale tylko punkty, których odcięta jest wymierna, na jednej prostej, i tylko punkty, których odcięta jest niewymierna na drugiej, czego w żaden sposób graficznie uwidocznić nie możemy; należy oprócz tego uwzględnić, iż między dwiema blizkiemi liczbami wymiernemi istnieje nieskończenie wiele liczb niewymiernych i odwrotnie; jakżeż więc punkty te na obu prostych są ze sobą poprzeplatane.

Polecamy czytelnikowi jeszcze aby dla przykładu spróbował otrzymać obraz geometryczny funkcji, określonej w sposób następujący:

gdy $x = 0$, $y = 3$; gdy x jest liczbą wymierną $\frac{m}{n}$, przyczem u-

łamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny, to $y = \frac{m^2 + n^2 + 2n}{m^2 + n^2}$, $(m \neq 0,\ n \neq 0)$; gdy x równa się liczbie niewymiernej, to $y = 1$. Obraz geometryczny tej funkcji składa się z punktów o odciętej niewymiernej na prostej $y = 1$ i z punktów, które tworzyłyby rój punktów, zgęszczających się koło tej prostej.

Tak samo niepodobna byłoby otrzymać zadawalniający wykres funkcji, o której mowa była przy końcu nr. 61.

Powyższe przykłady są nader pouczające, gdyż jasno wykazują, jak ogólnem jest pojęcie funkcji w matematyce współczesnej, jak nie należy ufać intuicji geometrycznej w tego rodzaju badaniach. Nie mniej jednak, opierając się na odpowiedniości doskonałej między parą liczb (x, y), a punktem, możemy zawsze, przy badaniu funkcji posługiwać się językiem geometrycznym: poza terminologją geometryczną kryje się treść analityczna, gdyż każdej zależności między wzajemnem położeniem punktów obrazu geometrycznego odpowiada ściśle określona zależność, wyrażająca się w formie równości lub nierówności między liczbami, odpowiadającemi tym punktom. Można w ten sposób wyrugować w zupełności intuicję geometryczną z dowodów twierdzeń, odnoszących się do własności funkcji, nie wyrzekając się bynajmniej korzyści, wynikającej z terminologji geometrycznej. Terminologja ta sprzyja krótkiemu i zwięzłemu wysłowieniu twierdzeń, nasuwa analogje i naprowadza na uogólnienia. Do jakiego zaś stopnia nie zależy od intuicji geometrycznej, dostatecznym probierzem jest fakt, że możemy stosować tego rodzaju wysłowienie twierdzeń nawet w przypadku, gdy liczba zmiennych jest większa od trzech: wtedy mamy punkt „analityczny“ przestrzeni wielowymiarowej, która niema konkretnego odpowiednika w naszej intuicji.

Przykłady funkcji, którym nie odpowiada wykres geometryczny w zwykłem znaczeniu tego słowa, są bardzo

pouczające ze względu na badanie i pogłębienie samego pojęcia funkcji i niektórych, wynikających z tego pojęcia własności, lecz spotykać się będziemy z tego rodzaju funkcjami sporadycznie, gdyż głównym naszym celem jest badanie funkcji o tyle prostych, że ich obraz geometryczny jest „zwyczajnym“ wykresem. Odgrodzić się jednak zupełnie od tych funkcji „niezwykłych“ w matematyce nie jest rzeczą ani możliwą ani pożyteczną; nieraz proste nawet zagadnienia mogą prowadzić do funkcji „niezwykłych“, z drugiej zaś strony poznajemy lepiej czem są funkcje „zwyczajne“ właśnie na tle szerszem tych funkcji „niezwykłych“.

64. Najprostsza zależność funkcjonalna między x i y zachodzi wtedy, gdy każdej wartości x odpowiada jedna i ta sama wartość zmiennej y. Obrazem geometrycznym takiej funkcji jest prosta, równoległa do osi Ox. Taka funkcja nazywa się *stałą*.

Następnie mamy zależność posiadającą tę własność, iż, jeżeli wartości zmiennej $x = a$ odpowiada wartość $y = b$, to wartości zmiennej $x = ka$ będzie odpowiadała wartość $y = kb$, gdzie k jest liczbą dowolną. Taka zależność nazywa się zależnością *wprost proporcjonalną*. Zależność tę określić można jeszcze w ten sposób: stosunek przy odpowiadających sobie wartości x i y jest stały: $\frac{y}{x} = m$, gdzie m jest stałe; stąd zależność ta wyraża się wzorem: $y = mx$. Geometrycznym obrazem tej zależności jest prosta, przechodząca przez początek współrzędnych, pod takim kątem α do osi Ox, którego tangens równa się m.

W blizkim związku z zależnością wprost proporcjonalną jest funkcja linjowa $y = mx + n$, gdzie m i n są to dwie stałe. Stosunek różnicy dwóch wartości zmiennej x do różnicy odpowiadających wartości zmiennej y jest stały, t. j. zależność między temi różnicami jest wprost propor-

cjonalna. Można tę własność wyrazić jeszcze inaczej: wartościom zmiennej x, tworzącym ciąg (postęp) arytmetyczny, odpowiadają wartości zmiennej y, tworzące także postęp arytmetyczny. Obrazem tej funkcji jest także linja prosta, przechodząca przez punkt $x = 0$, $y = n$ i nachylona od osi $0x$ pod kątem α, którego tangens równa się m.

Zupełnie inny jest wykres funkcji $y = x^2$. Przebieg zmienności tej funkcji, uwidoczniony na wykresie, opisać można w sposób następujący: gdy zmienna x rośnie od $-\infty$ do zera, y maleje od $+\infty$ do zera; gdy x rośnie od zera do $+\infty$, to y rośnie od zera do $+\infty$. Gdy nadamy zmienej x szereg wartości stanowiących postęp geometryczny, którego wykładnikiem jest q, otrzymamy szereg wartości na y, które będą też tworzyły postęp geometryczny, ale o wykładniku q^2. Gdy x rośnie od 0 do $+\infty$, y rośnie także od 0 do $+\infty$, ale prędzej od $x'a$. W poprzednich zdaniach użyliśmy szeregu wyrażeń, które nie zostały uprzednio przez nas ściśle określone. Określenia te podane będą później, ale niema w tem niedogodności, jeżeli czytelnik nauczy się już teraz na prostych wykresach chwytać sens tego rodzaju wyrażeń. Wykres funkcji $y = x^2$ leży całkowicie ponad osią odciętych z wyjątkiem punktu $x = 0$, $y = 0$, który jest najniższym punktem wykresu. Zbiór (Y) wartości, które przyjmuje funkcja y stanowią przedział $(0, +\infty)$, czyli zbiór wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych; wartość $y = 0$ jest kresem dolnym wartości funkcji, a jednocześnie jest i minimum, gdyż należy do wartości, które funkcja przyjmuje, mianowicie dla $x = 0$.

Przebieg zmienności funkcji $y = -x^2$ jest następujący: gdy x rośnie od $-\infty$ do 0, y rośnie od $-\infty$ do zera; gdy x rośnie od 0 do $+\infty$, y maleje od 0 do $-\infty$. Zbiór (Y) wartości, które funkcja przyjmuje stanowi przedział $(0, -\infty)$, czyli zbiór wszystkich niedodatnich liczb rzeczywistych; wartość $y = 0$ jest kresem górnym wartości funkcji, a jedno-

cześnie jest i maximum, gdyż należy do wartości, które funkcja przyjmuje. Wykres leży całkowicie pod osią odciętych, z wyjątkiem punktu $x=0$, $y=0$, który jest najwyższym punktem wykresu.

Czytelnik wykreśli sobie teraz pęk parabol $y=ax^2$; każdej wartości liczbowej parametru (litery) a, odpowiada inny wykres. Czytelnik powinien zbadać, jak zmienia się wykres ze zmianą wartości liczbowej a. Póki $a>0$, przebieg zmienności funkcji $y=ax^2$ ma cechy podobne do przebiegu zmienności krzywej $y=x^2$; gdy $a<0$, przebieg zmienności jest podobny do przebiegu zmienności funkcji $y=-x^2$. Powiemy krótko, że od parametru a zależy kształt paraboli $y=ax^2$ W obszarze wartości dodatnich, im a jest większe, tem parabola jest węższa.

Funkcja $y=ax^2+2bx+c$ daje jako wykres taką samą parabolę, jak $y=ax^2$, z tą tylko różnicą, że jest „przesunięta". W rzeczy samej, $y=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+c-\frac{b^2}{a}$; czyli $y+\frac{b^2-ac}{a}=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2$. Zrobimy teraz podstawienia: $y+\frac{b^2-ac}{a}=y_1$; $x+\frac{b}{a}=x_1$; zamiast zależności $y=ax^2+2bx+c$, otrzymamy zależność $y_1=ax_1{}^2$, t. j. zależność badaną poprzednio. Lecz wprowadzenie nowych zmiennych x_1, y_2 zamiast x, y jest równoznaczne geometrycznie z przesunięciem równoległem układu spółrzędnych.

Czytelnik, nieobeznany z tego rodzaju przykładami powinien wykreślić sobie jak najstaranniej funkcje: $y=x^3$, $y=-x^3$, $y=x^4$, $y=-x^4$; następnie pęki krzywych, zależnych od parametru a, $y=ax^3$, $y=ax^4$; następnie $y=x^5$, $y=x^6, \ldots, y=x^n, \ldots$ gdzie n przybiera wartości szeregu naturalnego i zbadać, o ile zależy kształt krzywej $y=x^n$ od wykładnika n.

Funkcje, o których była mowa, należą do klasy tak

zwanych funkcji całkowitych wymiernych względem x, albo wielomianów. Najogólniejszym kształtem funkcji całkowitej wymiernej jest:

(1) $$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

gdzie współczynniki $a_0, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami stałemi. Jeżeli wykreślimy sobie szereg oddzielnych krzywych:

(2) $$y = a_0 x^n,\ y = a_1 x^{n-1}, \ldots, y = a_{n-1} x,\ y = a_n,$$

i dla pewnej dowolnej wartości x, oznaczymy rzędne tych $n+1$ krzywych przez $y_0\ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$, to rzędna wykresu funkcji (1) będzie sumą tych rzędnych, t. j.

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n,$$

co pozwala otrzymać graficznie wykres krzywej (1) przy pomocy wykresów (2) przez dodawanie rzędnych. Później poznamy inne wytyczne, któremi kierować się należy przy wykreślaniu funkcji (1), oparte na rachunku różniczkowym. Funkcja równa stałej, funkcja linjowa i funkcja drugiego stopnia należą jako przypadki szczególne do tej klasy funkcji całkowitych wymiernych.

Następną klasę funkcji stanowią funkcje wymierne. Są to funkcje kształtu:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m},$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_2, \ldots, b_m$ są stałemi; funkcje tej klasy dają się więc określić, jako ilorazy dwóch wielomianów

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

W szczególnym przypadku, gdy $Q(x)$ nie zawiera x, czyli jest stałą, funkcja $\frac{P(x)}{Q(x)}$ staje się wielomianem; a więc klasa wielomianów jest zawarta w klasie funkcji wymiernych.

Wielomian posiada wartość oznaczoną dla każdej war-

tości zmiennej x. Inaczej rzecz się ma z funkcją wymierną; może się zdarzyć, że funkcja nie jest wcale określona dla pewnej wartości zmiennej x, gdyż wzór, wyrażający y wymaga wtedy dla obliczenia y dzielenia przez zero, co jest wykluczone. Tak, np., funkcja

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

jest określona przez wzór powyższy tylko dla tych wartości x, które są różne od $+1$ i od -1.

Zakładamy zazwyczaj, że w wyrażeniu funkcji wymiernej wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ nie mają wspólnego czynnika; gdyby to miało miejsce, to takie czynniki możemy usunąć. Ale należy zauważyć, że takie skracanie, czyli usuwanie wspólnych czynników w liczniku i w mianowniku, zmienia do pewnego stopnia samą funkcję. Weźmy dla przykładu funkcję wymierną $\frac{x(x-1)}{x-1}$; po skróceniu otrzymujemy x, bo, istotnie $y = \frac{x(x-1)}{x-1}$ przy każdej wartości $x \neq 1$ ma tę samą wartość, co funkcja $y = x$; ale wyjątek stanowi $y = 1$; gdyż dla $x = 1$, $y = x$ daje wartość jeden, a $y = \frac{x(x-1)}{x-1}$ nie daje nic, gdyż dla $x = 1$ funkcja $\frac{x(x-1)}{x-1}$ nie jest wcale określona.

Suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch funkcji wymiernych są to funkcje wymierne. Działania te uskuteczniamy według znanych reguł algebry elementarnej. Należy zauważyć, że dwa równe sobie wyrażenia, które otrzymujemy przez przekształcenia na zasadzie reguł algebraicznych, są dwoma funkcjami, przybierające równe naogół wartości, przyczem jednak przy poszczególnych, wyjątkowych wartościach zmiennej x równość może nie mieć miejsca, tak iż obie te funkcje mogą nie być, ściśle rzecz biorąc, zupełnie identyczne.

Tak, np., zamiast

$$\frac{1}{x-1}:\frac{1}{(x+1)x} \text{ możemy napisać } \frac{x(x+1)}{x-1};$$

funkcje $y=\frac{1}{x-1}:\frac{1}{x(x+1)}$ i $y=\frac{x(x+1)}{x-1}$

mają wartości jednakowe, o ile wykluczymy wartości dla $x=0$ i $x=-1$, gdyż przy $x=0$ i $x=-1$ pierwsza z tych funkcyj nie ma sensu, gdy tymczasem przy tych wartościach x, druga funkcja równa się zeru.

Najprostszą z funkcyj wymiernych jest funkcja $y=\frac{1}{x}$, albo ogólniej $y=\frac{a}{x}$. Funkcja ta wyraża zależność odwrotnie proporcjonalną. Czytelnik wykreśli sobie hyperbole równoboczne, wyrażone równaniami $y=\frac{a}{x}$, przy różnych wartościach zmiennej a. Korzystnem też może być wykreślenie funkcji $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{1}{x^3}, \ldots, y=\frac{1}{x^n}, \ldots$, i porównanie tych wykresów. Ponieważ do wykresu funkcyj wymiernych wrócimy później, stosując pochodną funkcji, te przykłady narazie mogą wystarczyć. Zauważmy jeszcze, że współczynniki w wyrażeniu funkcji wymiernej mogą być dowolnemi liczbami rzeczywistemi, jak $\sqrt{3}$, e, π, $\sqrt{2}$ i t. p., tak, iż

$$y=\frac{\sqrt{3}\,x+\pi}{x^2-\sqrt{2}\,.\,x+e}$$ jest funkcją wymierną.

Przechodzimy teraz do funkcyj algebraicznych. Przypuśćmy, że funkcja $y=f(x)$ jest określona jednoznacznie w przedziale (a, b) i że oprócz tego spełnia równanie:

$$y^n+R_1(x)\,y^{n-1}+R_2(x)\,y^{n-2}+\ldots+R_{n-1}(x)\,y+R_n(x)=0,$$

gdzie $R_1(x)$, $R_2(x), \ldots, R_n(x)$ są funkcjami wymiernemi zmiennej x.

Taką jest, np., funkcja $y = x + \sqrt{1 + x^2}$, gdzie bierzemy wartość arytmetyczną pierwiastka. Funkcja ta czyni zadość równaniu $y^2 - 2xy - 1 = 0$; tu $n = 2$, $R_1(x) = -2x$, $R_2(x) = -1$.

Funkcja $y = \frac{1}{x} + \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + x^2}}$, gdzie bierzemy, by mieć funkcję określoną jednoznacznie, wartość arytmetyczną pierwiastka, czyni zadość równaniu:

$$\left\{\left(y - \frac{1}{x}\right)^3 - 1\right\}^2 = 1 + x^2;$$

które sprowadzić można do postaci $y^6 + R_1(x)y^5 + \ldots + R_6(x) = 0$; tu $n = 6$.

Weźmy jeszcze pod uwagę funkcję $y = +\sqrt{1 - x^2}$; funkcja ta jest określona tylko dla wartości x, należących do przedziału $(-1, 1)$. Tu już dobitnie zaznacza się różnica między funkcjami tej klasy i funkcjami klasy poprzedniej: funkcja całkowita określona jest przy każdej wartości x; funkcja wymierna może nie być określoną przy poszczególnych wartościach zmiennej x; wreszcie funkcja algebraiczna może nie być określoną przy wszystkich wartościach x, należących do pewnego przedziału.

Gdy $n = 1$, równanie (3) przechodzi na $y + R_2(x) = 0$, czyli $y = -R_1(x)$; stąd wynika, że funkcje wymierne należą, jako przypadek szczególny, do klasy funkcyj algebraicznych.

Każda funkcja, która nie czyni zadość żadnemu równaniu kształtu (3), nazywa się *przestępną*. Do takich funkcyj należą, naprz., funkcje trygonometryczne $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, funkcja wykładnicza $y = a^x$, funkcja logarytmiczna, funkcja gamma, funkcja Bessela, funkcje eliptyczne i t. d.

Przypuszczamy, iż przebieg zmienności funkcyj trygonometrycznych i ich wykresy są czytelnikowi znane. Do tych funkcyj powrócimy zresztą parokrotnie później i udo-

wodnimy, między innemi, ich przestępność. W blizkim związku z funkcjami trygonometrycznemi są tak zwane funkcje odwrotne $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$. Łuk koła trygonometrycznego,* którego sinus ma daną wartość x nazywa się arcus sinus x; piszemy

$$y = \arcsin x.$$

Tak samo łuk koła trygonometrycznego, którego cosinus ma daną wartość x, nazywa się arcus cosinus x; piszemy

$$y = \arccos x.$$

Wreszcie łuk, którego tangens ma daną wartość x, nazywa się arcus tangens x; piszemy

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

Zauważmy teraz, iż wykresy tych funkcyj odwrotnych nie stanowią dla nas nic nowego, o ile przyjmiemy wykresy funkcyj trygonometrycznych za znane. W rzeczy samej, związki między zmiennemi x i y w tych funkcjach odwrotnych $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ należy uważać, na mocy określenia, za identyczne odpowiednio z następującemi

$$x = \sin y, \ x = \cos y, \ y = \operatorname{tg} y,$$

które się różnią od związków, wyrażonych równaniami $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ tylko zamianą zmiennych, t. j. x jest na miejscu y, a y na miejscu x.

Przy wykresach możemy tu stosować następującą zasadę ogólną: jeżeli C_1 i C_2 są wykresami dwóch zależności między parami liczb (x, y), określonemi za pomocą dwóch równań

$$f(x, y) = 0 \text{ i } f(y, x) = 0,$$

to wykresy C_1 i C_2 są symetryczne względem dwusiecznej

$$y = x.$$

---

* Łukiem koła trygonometrycznego nazywamy tutaj liczbę, która jest miarą długości tego łuku.

W rzeczy samej; jeżeli para liczb $x=a$, $y=b$ czyni zadość pierwszemu równaniu, to para liczb $x=b$, $y=a$ będzie czyniła zadość drugiemu równaniu; a więc, jeżeli punkt o spółrzędnych (a, b) należy do krzywej C_1 (patrz rys. 1), to punkt (b, a) należy do krzywej C_2. Lecz punkty (a, b) i (b, a) są, jak łatwo sprawdzić, symetryczne względem dwusiecznej $y=x$. Jeżeli więc punkt M_1 leży na krzywej C_1, to punkt symetryczny M_2 leży na krzywej C_2. Ponieważ rozumowanie można odwrócić, więc i odwrotnie, każdemu punktowi M_2 krzywej C_2 odpowiada punkt symetryczny M_1 na krzywej C_1.

Ta sama symetrja zamienia oś Ox na oś Oy z zachowaniem zwrotu. Stąd wynika, że wykresy zależności $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\text{arc tg}\, x$ można otrzymać z krzywych $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\text{tg}\, x$ przez symetrję względem dwusiecznej $x=y$.

Tu zachodzi okoliczność następująca: jednej wartości zmiennej x odpowiada nieskończenie wiele wartości zmiennej y, jeżeli bowiem y jest łukiem koła trygonometrycznego, którego sinus lub cosinus równa się x, to $y+2k\pi$, (gdzie $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$) czyni zadość temu samemu warunkowi; jeżeli y jest łukiem, którego tangens lub cotangens równa się y, to to samo da się powiedzieć o $y+k\pi$, gdzie $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ Widzimy więc, że nie mamy tu funkcji w tym znaczeniu, jakie nadaliśmy temu pojęciu poprzednio, podając zasadnicze określenie, gdyż zastrzegliśmy wtedy, że jednej wartości zmiennej x odpowiada jedna tylko wartość zmiennej y. Mamy więc dwie drogi przed sobą, albo uogólnić pojęcie funkcji w sensie wielowartościowości, albo też postarać się ująć zależność między x i y w $\arcsin x=y$, $\arccos x=y$, $\text{arc tg}\, x=y$ jako, nie jedną funkcję, ale połączenie nieskończenie wielu różnych funkcyj. W rzeczy samej, jeśli obok warunku $\sin y=x$, postawimy jeszcze warunek

$-\frac{\pi}{2} \leqslant y < \frac{\pi}{2}$, to łatwo sprawdzić, iż otrzymujemy dla każdej wartości x, w przedziale $(-1, +1)$ jedną tylko wartość na y; tak więc określiliśmy pewną funkcję jednowartościową, którą oznaczać będziemy przez $\operatorname{Arc\,sin} x = y$; wykres tej funkcji stanowi część wykresu poprzedniego $y = \arcsin x$ wewnątrz prostokątu, utworzonego przez 4 proste $x = \pm 1$ i $y = \pm \frac{\pi}{2}$. Szereg innych funkcyj otrzymamy dodając do $\operatorname{Arc\,sin} x$ wielokrotność 2π; tak więc otrzymamy ciąg, tworzący postęp arytmetyczny

$$y_2 = \operatorname{Arc\,sin} x + 2\pi, \quad y_4 = \operatorname{Arc\,sin} x + 4\pi, \ldots.$$
$$y_{2p} = \operatorname{Arc\,sin} x + 2p\pi, \ldots.$$
$$y_{-2} = \operatorname{Arc\,sin} x - 2\pi, \quad y_{-4} = \operatorname{Arc\,sin} x - 4\pi, \ldots.$$
$$y_{-2p} = \operatorname{Arc\,sin} x - 2p\pi, \ldots.$$

Ażeby wyczerpać wszystkie wartości łuku, którego sinus równa się x, należy dołączyć jeszcze drugi postęp:

$$y_1 = \pi - \operatorname{Arc\,sin} x, \quad y_3 = 3\pi - \operatorname{Arc\,sin} x, \ldots,$$
$$y_{2p+1} = (2p+1)\pi - \operatorname{Arc\,sin} x, \ldots.$$
$$y_{-1} = -\pi - \operatorname{Arc\,sin} x, \quad y^{-} = -3\pi - \operatorname{Arc\,sin} x, \ldots,$$
$$y_{-(2p+1)} = -(2p+1)\pi - \operatorname{Arc\,sin} x, \ldots.$$

Usunęliśmy zatem wielowartościowość, wprowadziwszy na to miejsce nieskończenie wiele funkcyj jednowartościowych. Zauważmy, że wszystkie wzory powyższe można streścić jednym

$$y_n = n\pi + (-1)^n \operatorname{Arc\,sin} x, \quad (\text{gdzie } n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

W ten sam sposób postąpić możemy ze związkiem między x i y, określonym przez wzór $\cos y = x$; jeśli do tego dodamy warunek, by $0 \leqslant y < \pi$, to każdej wartości x w przedziale $(-1, 1)$ odpowiadać będzie jedna tylko wartość y i te wartości y, określone jednoznacznie, utworzą nam funkcję, którą oznaczać będziemy przez $\operatorname{Arc\,cos} x = y$;

wykres tej funkcji stanowi część poprzedniego wykresu zależności $\cos y = x$ i całkowicie mieści się wewnątrz prostokąta, utworzonego przez 4 proste: $y=0$, $x=\pi$, $x=1$, $x=-1$. Pozostałe wartości należą do innych funkcyj, które związane są z funkcją $\operatorname{Arc}\cos x$ w sposób następujący

$$y = 2k\pi \pm \operatorname{Arc}\cos x, \quad (\text{gdzie } k = \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

Funkcję $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x = y$ określimy przy pomocy zależności $\operatorname{tg} y = x$, do której dołączamy warunek $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$; funkcja ta jest określona jednoznacznie dla każdej wartości rzeczywistej zmiennej x, a wykres jej mieści się całkowicie w paśmie między dwiema prostemi równoległemi $y = -\frac{\pi}{2}$ i $y = \frac{\pi}{2}$.

Pozostałe wartości y, które czynią zadość zależności $\operatorname{tg} y = x$, utworzą nam ciąg funkcji:

$$x_n = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x + n\pi, \quad (\text{gdzie } n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Powstaje teraz pytanie, czy nie należy, rozszerzywszy pojęcie funkcji przez wprowadzenie wielowartościowości, uważać funkcji $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x + n\pi$ za gałęzie jednej i tej samej funkcji wielowartościowej $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$; tak samo $2n\pi + \operatorname{Arc}\cos x$ i $n\pi + (-1)^n \operatorname{Arc}\sin x$, czy nie należy uważać za gałęzie funkcyj wielowartościowych $\operatorname{arc}\cos x$ i $\operatorname{arc}\sin x$ odpowiednio. Otóż, w rzeczy samej: istnieją głębsze przyczyny, dla których należy uważać ciągi oddzielnych funkcyj, czyniących, odpowiednio, zadość zależnościom $\sin y = x$, $\cos y = x$, $\operatorname{tg} y = x$, za gałęzie odpowiednich trzech funkcyj wielowartościowych, ale powody te występują dopiero, gdy rozszerzamy określenie tych funkcyj przez wprowadzenie liczb zespolonych; w teorji zaś funkcyj zmiennej rzeczywistej, bez niedogodności możemy poprzestać na pierwotnem określeniu funkcji t. j. bez wprowadzenia wielowartościowości. Do tego przed-

miotu wrócimy później, gdy mowa będzie o funkcji odwrotnej i o funkcji uwikłanej.

Rozważania, które tu rozwijamy, mają przeważnie charakter propedeutyki, mającej przygotować zrozumienie i niezbędność pewnych pojęć i ułatwić dalszy ciąg nauki o funkcjach. W tym celu pożytecznem jest już zawczasu oswojenie się z wykresami niezbyt zawiłych funkcyj, które można otrzymać, nawet bez pomocy rachunków wyższych, metodą konstrukcyj geometrycznych. Mając ustalone wykresy pewnej niewielkiej liczby funkcyj zasadniczych, jak $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sin x$ i t. p., możemy, przy pomocy tych szablonów drogą konstrukcji otrzymywać wykresy innych funkcyj, bardziej złożonych. Jedna z tych metod konstrukcyjnych, oparta na dodawaniu rzędnych, podana była poprzednio: jeżeli wykreśliliśmy dwie funkcje $y = \varphi(x)$ i $y = f(x)$, to możemy przez dodawanie rzędnych wykreślić funkcję $y = f(x) + \varphi(x)$; albo inaczej, niech równoległa do osi Oy przecina krzywą $y = \varphi(x)$ w punkcie M_1, a krzywą $y = f(x)$ w punkcie M_2, to miejsce geometryczne środków odcinków $M_1 M_2$ jest wykresem funkcji

$$y = \tfrac{1}{2}\{f(x) + \varphi(x)\}.$$

Wskażemy teraz, zapomocą jakiej konstrukcji zbudować można wykres funkcji złożonej $y = f\{\varphi(x)\}$, jeżeli mamy już wykresy funkcyj $y = f(x)$ i $y = \varphi(x)$. Symbol $y = f\{\varphi(x)\}$ należy rozumieć w sposób następujący: danej wartości x w przedziale (a, b), gdzie funkcja $\varphi(x)$ jest określona, odpowiada wartość $z = \varphi(x)$; nadajemy teraz zmiennej niezależnej x w zależności (funkcji) $y = f(x)$ właśnie tę wartość $z = \varphi(x)$, co daje nam wartość y, wyznaczoną przez związek $y = f(z)$;* w ten sposób, za pośrednictwem zmien-

---

* Gdy x należy do przedziału (a, b), to z przyjmuje wartości, należące, np., do przedziału (a_1, b_1); przypuszczamy, że funkcja $f(z)$ jest właśnie określona w przedziale (a_1, b_1).

nej x, zostaje ustanowiona pewna odpowiedność między wartością zmiennej x, a wartością zmiennej y, czyli krótko $y=f(z)$, gdzie $z=\varphi(x)$. Konstrukcja geometryczna jest następująca: prowadzimy dwusieczną $y=x$; niech dowolna równoległa do osi Oy przecina wykres krzywej $y=\varphi(x)$ w punkcie N, (patrz rys. 2); przez punkt N prowadzimy równoległą do osi Ox, aż do przecięcia się w punkcie Q z dwusieczną; przez punkt Q prowadzimy równoległą do osi Oy aż do przecięcia się w punkcie N' z wykresem funkcji $y=f(x)$, a wreszcie przez punkt N' równoległą do osi Ox aż do przecięcia się w punkcie M z rzędną NP. Miejsce geometryczne punktu M jest wykresem funkcji $y=f\{\varphi(x)\}$. W rzeczy samej $NP=OP'=\varphi(x)$, $MP=N'P'=f\{\varphi(x)\}$.

Można opisać tę konstrukcję jeszcze inaczej: wykres funkcji $f\{\varphi(x)\}$ jest miejscem geometrycznem czwartego wierzchołka M prostokąta, którego pozostałe wierzchołki znajdują się odpowiednio na krzywych $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ i na dwusiecznej $y=x$.

Ćwiczenia: wykreślić metodą graficzną następujące funkcje: $y=x^2+x^3$; $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$; $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$; $y=\sin\frac{1}{x}$; $y=\frac{1}{\sin x}$; $y=\sin(x^2)$; $y=\sin^2 x$; $y=\sin(e^x)$; $y=e^{\sin x}$; $y=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$; $y=\operatorname{tg} x^2$; $y=\operatorname{tg}^2 x$; $y=\operatorname{Arc\,tg}(k\operatorname{tg} x)$; $y=\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x}$; funkcję $y=\log x$ przy pomocy wykresu $y=e^x$, (symetrja względem dwusiecznej); $y=\log\sin x$; $y=\sin\log x$; $y=\operatorname{Arc\,tg}\log x$; $y=e^{\frac{1}{x}}$; $y=\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{2}$.

Wszystkie te funkcje należy wykreślić, posługując się tylko wykresami następujących f.: $y=x^2$; $y=x^3$, $y=e^x$, $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$.

Chociaż wszystkie te funkcje należą do najprostszych, jednak ich zachowanie się, czyli przebieg zmienności w pobliżu niektórych punktów, może być dosyć zawiły: już teraz wskazanem jest, by czytelnik przyjrzał się bliżej i uświadomił sobie na wykresie, jaki kształt mają obrazy geometryczne funkcyj $y = \sin \frac{1}{x}$, $y = \sin \log x$, $y = \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$, $y = e^{\frac{1}{x}}$, w pobliżu punktu początkowego spółrzędnych, t. j. gdy x zbliża się do zera.

65. Otoczenie punktu. Funkcja w otoczeniu punktu. Przy badaniu funkcji nieraz koniecznem bywa wydzielić z pośród innych te, które funkcja przyjmuje w dowolnie małym przedziale, otaczającym dany punkt Taki dowolnie mały przedział nazywa sią „otoczeniem" danego punktu. Nieraz pożądanem bywa zwrócić uwagę na wartości funkcji tylko z lewej lub tylko z prawej strony danego punktu; mamy wtedy „otoczenie prawostronne" i „otoczenie lewostronne". Mówić będziemy tu o funkcjach, określonych w pewnym przedziale, t. j. dla wartości x, należących do pewnego przedziału zasadniczego (m, n). Niech a będzie punktem tego przedziału, różnym od m i n. „Otoczeniem lewostronnem" punktu a jest dowolnie mały przedział (c, a), którego a jest krańcem górnym, t. j. $c < a$, przyczem c może być tak blizkiem a, jak się podoba; sam punkt a do otoczenia nie należy; jeśli zaś będzie nam chodziło o przyłączenie punktu a do otoczenia, o nazwiemy je „otoczeniem w szerszem znaczeniu". Analitycznie wyrazi się otoczenie punktu a nierównością $a - \eta \leqslant x < a$ (gdzie η jest liczbą dodatnią, dowolnie małą), jeżeli otoczenie jest lewostronne, a nierównością

$$a < x \leqslant a + \eta,$$

jeżeli otoczenie jest prawostronne; należy te nierówności

rozumieć w ten sposób, że do „otoczenia“ należy każda liczba x, która spełnia, odpowiednio, jeden z tych dwóch warunków. Zbiór zaś liczb x, wynikający z połączenia „otoczenia“ lewostronnego z „otoczeniem“ prawostronnem razem, stanowi to, co nazywać będziemy poprostu otoczeniem punktu a.

Będziemy mówili, że funkcja dana $f(x)$, określona w przedziale (m, n), posiada w otoczeniu punktu a, (gdzie $m < a < n$) pewną własność, — jeżeli istnieje otoczenie punktu a, takie, że wszystkie wartości funkcji $f(x)$, dla wszystkich wartości zmiennej, należących do tego otoczenia, własność tę posiadają. Jeżeli $a = n$, to może być, oczywiście, mowa tylko o otoczenin lewostronnem; jeżeli $a = m$, to może być mowa tylko o otoczeniu prawostronnem; jeżeli $m < a < n$, to może być mowa o otoczeniu lewostronnem, prawostronnem, albo o otoczeniu wprost. O ile przytem nie nadmienimy, że chodzi o otoczenie „w szerszem znaczeniu“, to sam punkt a należy uważać za wykluczony.

Tak, np., funkcja $y = 0{,}49 + x^3$ jest mniejsza od $\frac{1}{2}$ w otoczeniu punktu $x = 0$; w rzeczy samej, w przedziale od $-0{,}1$ do $+0{,}1$, wszystkie wartości tej funkcji są mniejsze od $0{,}5$; w otoczeniu tegoż punktu nasza funkcja ma wartości dodatnie.

Funkcja $y = |x|$ jest dodatnia w otoczeniu punktu $x = 0$; to orzeczenie jest prawdziwe, chociaż dla $x = 0$, $y = 0$, a więc nie ma wartości dodatniej, ponieważ punkt nie należy do swego „otoczenia“.

Czytelnik sprawdzi słuszność następujących orzeczeń:

1) Funkcja $y = \frac{|x|}{x}$ ma wartość ujemną w lewostronnem otoczeniu punktu $x = 0$, ma wartość dodatnią w otoczeniu prawostronnem tego punktu.

2) Funkcja $y = \sin\frac{1}{x}$ w otoczeniu punktu $x = 0$ przyj-

muje wartości równe każdej liczbie przedziału liczbowego $(-1, +1)$.

3) Funkcja $y = \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x}$ jest dodatnia w prawostronnem otoczeniu, a ujemna w lewostronnem otoczeniu punktu $x=0$; funkcja $y = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x}$ różni się od jedności mniej niż o jedną setną, albo jedną tysięczną, albo jedną miljonową w otoczeniu prawostronnem punktu $x=0$; taż sama funkcja różni się od -1 mniej niż o 0,1 lub 0,01,..., w otoczeniu lewostronnem punktu $x=0$.

W tych wszystkich przykładach punkt $x=0$ nie należy do otoczenia; zresztą wartości funkcyj dla $x=0$ w tych przykładach nie były nawet określone.

Jeżeli w otoczeniu punktu $x=a$ wszystkie wartości funkcji są mniejsze od pewnej liczby stałej M, to mówimy krótko, że funkcja jest ograniczona od góry w otoczeniu punktu a; jeżeli natomiast wartości funkcji w otoczeniu punktu a, są większe od pewnej liczby stałej m, to mówimy krótko, że funkcja jest ograniczona od dołu w otoczeniu punktu a. Jeżeli funkcja jest ograniczona zarazem i od góry i od dołu, to nieraz dla krótkości będziemy mówili poprostu „ograniczona"

Jeżeli funkcja jest ograniczona w otoczeniu każdego punktu przedziału (m, n), to jest ograniczona w przedziale (m, n).

Rozumie się, że mowa tu o otoczeniu obustronnem dla każdego punktu a wewnątrz (m, n), o otoczeniu lewostronnem w punkcie n i prawostronnem w punkcie m.

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności. Zaprzeczmy tezie, t. j. przyjmijmy iż, pomimo spełnienia warunków założenia, funkcja nie jest ograniczona, przypuśćmy, np. od góry w przedziale (m, n).

Niech M_1 będzie liczbą dowolnie wielką; wśród zbioru (Y) wartości funkcji w przedziale (m, n) są więc wartości większe od M_1; niech y_2 będzie jedną z tych wartości; niech M_2 oznacza liczbę, większą od y_1 i niech y_2 oznacza wartość naszej funkcji większą od M_2; niech M_3 oznacza dowolną liczbę, większą od y_2 i y_3 wartość naszej funkcji w (m, n) większą od M_3. Proces ten można przedłużać w nieskończoność, gdyż inaczej nasza funkcja byłaby ograniczona od góry, wbrew temu, co przyjęliśmy. Utworzymy ciąg nieskończony, taki, że $M_k \rightarrow \infty$:

$$M_1 < y_1 < M_2 < y_2 < M_3 < y_3 < \ldots < M_k < y_k < M_{k+1} < \ldots$$

Na mocy samego pojęcia funkcji te wartości $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ odpowiadają wartościom, dajmy na to, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots$, zmiennej niezależnej, przytem nie może być $x_k = x_l$ dla $k \neq l$, gdyż w takim razie $y_k = y_l$, co niemożliwe, bo $y_l < y_m$ lub $y_l > y_m$, zależnie od tego, czy $l < m$, czy też $l > m$. Wszystkie punkty ciągu (zbioru) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots$ są zawarte w przedziale skończonym (n, m), t. j. $m \leqslant x_k \leqslant n$ dla każdego wskaźnika k. Na mocy twierdzenia Weierstrassa (patrz 1. 42), zbiór ten posiada przynajmniej jeden punkt skupienia ξ. Otóż, można teraz okazać, że funkcja nasza, wbrew założeniu, nie jest ograniczona (od góry), w otoczeniu punktu ξ, który sam, oczywiście, należy do przedziału (m, n). Należy w tym celu udowodnić, że, jakkolwiek wielką jest liczba M, istnieje otoczenie punktu ξ takie, że funkcja w tem otoczeniu przyjmuje wartości większe od M. Ponieważ $M_k \rightarrow \infty$, można znaleźć wskaźnik n_0, taki że $M_k > M$, skoro tylko $k > n_0$, a więc wszystkie liczby y_k o wskaźniku $k > n_0$ spełniają warunek $y_k > M$. Niech η oznacza liczbę dodatnią, dowolnie małą i utwórzmy przedział $(\xi - \eta, \xi + \eta)$; ponieważ ξ jest punktem skupienia zbioru $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ więc z pewnością można znaleźć punkt x_n tego zbioru, należący do przedziału $(\xi - \eta, \xi + \eta)$,

i o wskaźniku n większym od n_0, gdyż inaczej w przedziale $(\xi - \eta, \xi + \eta)$ byłaby tylko skończona liczba punktów ciągu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots$, co jest sprzeczne z istnieniem punktu skupienia ξ w tym przedziale. W punkcie x_n wartość naszej funkcji $f(x)$ jest równa y_n, t. j. $y_n = f(x_n)$; lecz $y_n > M$, gdyż $n > n_0$, tak że

$$f(x_n) > M,$$

gdzie x_n należy do otoczenia punktu ξ. Otrzymany wynik jest sprzeczny z założeniem, twierdzenie zostało więc udowodnione.

Wniosek. Jeżeli funkcja jest ograniczona w przedziale (m, n), to w przedziale tym istnieje przynajmniej jeden taki punkt, w otoczeniu którego funkcja posiada ten sam kres górny (dolny), co i w całym przedziale (m, n). Otoczenie rozumiemy tutaj w znaczeniu „szerszem".

Wiemy, że funkcja ograniczona w przedziale posiada w tym przedziale kres górny (dolny); niech K oznacza ów kres górny. Jeżeli funkcja istotnie osiąga kres górny K w jakimś punkcie ξ przedziału, t. j. jeżeli $f(\xi) = K$, to twierdzenie nasze jest oczywiste, gdyż wtedy ξ jest tym punktem, w otoczeniu którego kresem górnym funkcji jest liczba K, gdyż otoczenie nasze, jako szersze, zawiera punkt ξ.

Jeżeli funkcja nie osiąga w przedziale wartości $= K$, t. j. jeżeli K nie należy do zbioru (Y) wartości, które funkcja przyjmuje w przedziale (m, n), to, jak wiemy, K jest punktem skupienia tego zbioru, przyczem $f(x) < K$ dla wszystkich wartości zmiennej x w (m, n)

Utwórzmy funkcję

$$F(x) = \frac{1}{K - f(x)};$$

mianownik jest zawsze dodatni; nie równa się zeru dla żadnej wartości x w (m, n), czyli, że funkcja $F(x)$ jest określona dla każdej wartości x w przedziale (m, n); lecz nie

jest, oczywiście, ograniczona w tym przedziale. Na mocy poprzedniego twierdzenia istnieje przynajmniej jedna wartość zmiennej x w przedziale (m, n), w otoczeniu której funkcja nie jest ograniczona; niech ζ będzie tą wartością zmiennej x. Niech M oznacza dowolnie wielką liczbę, a $(\zeta - \eta, \zeta + \eta)$ dowolnie mały przedział, stanowiący otoczenie punktu ζ; w tym przedziale istnieje więc punkt x_0, spełniający warunek

$$F(x_0) > M,$$

skąd wynika

$$f(x_0) > K - \frac{1}{M}.$$

Ponieważ $\frac{1}{M}$ jest liczbą dowolnie małą dodatnią, więc K istotnie jest kresem górnym funkcji w przedziale $(\zeta - \eta, \zeta + \eta)$, jakkolwiek małą jest liczba η.

66. *Granica funkcji.*

Przypuśćmy, że funkcja jest określona w przedziale (m, n) i niech a oznacza jakkolwiek punkt tego przedziału. Wartość funkcji w punkcie a oznaczać będziemy, jak zwykle, przez $f(a)$. Zajmijmy się teraz wartościami naszej funkcji nie w punkcie a, lecz w otoczeniu punktu a.

Wyobraźmy sobie, np., otoczenie, wyrażone przez nierówności $a < x \leqslant a + \eta$ i $a - \eta \leqslant x < a$ i niech V_η oznacza zbiór wartości naszej funkcji w tem otoczeniu, t. j. gdy x spełnia którąkolwiek z napisanych przed chwilą nierówności. Wyobraźmy sobie teraz, że zbiór wartości (V_η) mieści się całkowicie wewnątrz przedziału $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$, gdzie g jest pewną liczbą stałą. Wyobraźmy sobie dalej, że ε dąży do zera wraz z η, t. j. że każdej dowolnie małej liczbie dodatniej ε można podporządkować liczbę η taką, by co tylko wypowiedziane warunki były spełnione. Warunki te wyrażają, że funkcja $f(x)$ w otoczeniu punktu a zbliża się do wartości stałej g tyle, ile wymaga dowolnie mała miara

przybliżeń ε; mówimy wtedy krótko, że g jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie a, czyli, inaczej, że funkcja dąży w punkcie a do granicy g. Oznaczamy to symbolicznie w następujący sposób:

$$\lim_{x \to a} f(x) = g, \quad \text{lub poprostu} \quad f(x) \to g \quad \text{dla} \quad x \to a.$$

Treść tylko co wysłowionego określenia wyrazić można nierównościami w sposób następujący:

Jeżeli do każdej dowolnej liczby dodatniej ε *można dobrać liczbę dodatnią* η *taką, że nierówności*

$$a < x \leqslant a + \eta \quad \text{i} \quad a - \eta \leqslant x < a$$

pociągają zawsze nierówność

$$|f(x) - g| < \varepsilon,$$

to $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g$.

Zamiast otoczenia obustronnego, możemy brać pod uwagę, bądź otoczenie tylko lewostronne punktu a, bądź prawostronne.

Liczba g jest granicą lewostronną funkcji $f(x)$ w punkcie a, jeżeli dowolnej liczbie dodatniej ε można zawsze podporządkować liczbę dodatnią η, posiadającą tę własność, że nierówność

$$a - \eta \leqslant x < a, \quad \text{albo} \quad 0 < a - x \leqslant \eta$$

pociąga za sobą nierówność

$$|f(x) - g| < \varepsilon.$$

Liczba g jest granicą prawostronną funkcji $f(x)$ w punkcie a, jeżeli do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można zawsze dobrać takie $\eta > 0$, że nierówność

$$a < x \leqslant a + \eta, \quad \text{albo} \quad 0 < x - a \leqslant \eta$$

pociąga za sobą nierówność

$$|f(x) - g| < \varepsilon.$$

Granicę lewostronną w punkcie a, o ile istnieje, oznaczamy przez $f(a - 0)$, a granicę prawostronną przez $f(a + 0)$.

Funkcja może posiadać jednocześnie granicę lewo-

stronną i prawostronną w punkcie a i te granice mogą nie być sobie równe. Gdy są one sobie równe, istnieje granica w zwykłem znaczeniu tego słowa, tak jakeśmy ją określili poprzednio, biorąc pod uwagę przedział obustronny.

Tak, np., funkcja $\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x}$ posiada granicę prawostronną, która równa się $\frac{\pi}{2}$ i granicę lewostronną, która równa się $-\frac{\pi}{2}$, (w punkcie $x=0$).

Funkcja $\sin\frac{1}{x}$ nie posiada w punkcie $x=0$, ani granicy lewostronnej, ani granicy prawostronnej. Dlaczego?

Funkcja $y=\frac{|x|}{x}$ posiada granicę lewostronną, którą jest -1, i prawostronną, równą $+1$, w punkcie $x=0$.

Należy odróżniać granicę funkcji dla $x=a$ od wartości funkcji w punkcie a: co innego $f(a)$, a co innego $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ lub $f(a+0)$ czy $f(a-0)$. W rzeczy samej, wartość $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ zależy od wartości funkcji w otoczeniu punktu, do którego sam punkt a nie należy. Tem się objaśnia, dlaczego mogliśmy, w tylko co przytoczonych przykładach, mówić o granicach odpowiednich funkcji w punkcie $x=0$, chociaż wartość samych tych funkcji $\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x}$ i $\frac{|x|}{x}$ w punkcie $x=0$ nie była przez nas wcale określona. Moglibyśmy tę lukę zapełnić, nadając tym funkcjom w punkcie $x=0$ wartość zupełnie dowolną, np. zero. Mielibyśmy więc wtedy, np., dla funkcji $y=\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x-a}$ w punkcie $x=a$ granicę lewostronną $f(a-0)=-\frac{\pi}{2}$, granicę prawostronną $f(a+0)=\frac{\pi}{2}$ i wartość w punkcie a, czyli $f(a)=0$.

Jeżeli funkcja jest określona dla wszystkich wartości $x > x_0$ czyli w otoczeniu punktu (niewłaściwego) $+\infty$, to możemy mówić o granicy funkcji $f(x)$, gdy zmienna x dąży do nieskończoności.

Jeżeli do każdej liczby $\varepsilon > 0$ dobrać można liczbę $M(\varepsilon)$ taką, że nierówność

$$x > M(\varepsilon)$$

pociąga nierówność

$$|f(x) - g| < \varepsilon,$$

to g jest granicą funkcji, gdy $x \to +\infty$. Symbolicznie oznaczać to będziemy przez

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g \quad \text{albo} \quad f(x) \to g, \text{ gdy } x \to +\infty;$$

wtedy w otoczeniu punktu $+\infty$ funkcja $f(x)$ zbliża się do g z dowolnie małą miarą przybliżeń ε. Mówimy też, że funkcja dąży do granicy g, gdy x dąży do $+\infty$.

Symbol $\lim_{x \to -\infty} f(x) = g$ albo $f(x) \to g$, gdy $x \to -\infty$, oznacza, że zachodzi okoliczność następująca: do każdej, dowolnie małej liczby ε można dobrać taką liczbę $m(\varepsilon)$, że nierówność $x < m(\varepsilon)$

pociąga nierówność

$$|f(x) - g| < \varepsilon,$$

t. j. w otoczeniu punktu $-\infty$ funkcja $f(x)$ zbliża się do liczby g z dowolną miarą przybliżeń ε. Mówimy wtedy, że granicą funkcji, gdy x dąży do $-\infty$, jest liczba g.

Symbol $f(x) \to +\infty$ dla $x \to a$ oznacza, że zachodzi okoliczność następująca. Jakkolwiek wielką jest liczba M, to jednak w pewnem otoczeniu punktu $x = a$ zachodzi zawsze nierówność $f(x) > M$.

Mówimy wtedy, że funkcja w punkcie a dąży do $+\infty$. Możemy i tu, o ile zajdzie potrzeba, odróżnić granicę lewostronną od prawostronnej.

Funkcja $f(x)$ dąży do $+\infty$ w punkcie a lewostronnie, jeżeli każdej dowolnie wielkiej liczbie M można podporząd-

kować liczbę $\eta > 0$ taką, że w przedziale $(a - \eta, a)$, stanowiącym otoczenie lewostronne punktu a, t. j. dla wartości zmiennej, spełniających warunek:

$$a - \eta \leqslant x < a,$$

mamy zawsze $f(x) > M$.

Funkcja $f(x)$ dąży do $+\infty$ w punkcie a prawostronnie, jeżeli każdej dowolnie wielkiej liczbie M można podporządkować liczbę $\eta > 0$ taką, że dla wszystkich wartości x, spełniających warunek

$$a < x < a + \eta,$$

mamy zawsze $f(x) > M$; liczba η zależy, oczywiście, od M.

W podobny sposób można określić symbole:

$$\underset{x \to a}{f(x) \to -\infty}; \quad \underset{x \to +\infty}{f(x) \to +\infty}; \quad \underset{x \to +\infty}{f(x) \to -\infty};$$

$$\underset{x \to -\infty}{f(x) \to +\infty}; \quad \underset{x \to -\infty}{f(x) \to -\infty}.$$

Po objaśnieniach i przypadkach poprzednio wyłożonych, czytelnik z łatwością sam rozpatrzy każdy z tych przypadków i napisze odpowiednie warunki w postaci nierówności; dla przykładu wyjaśnijmy jeszcze, co znaczy symbol $f(x) \to +\infty$, gdy $x \to +\infty$; oznacza to, że do każdej liczby M dobrać można liczbę l taką, że $x > l$ pociąga $f(x) > M$; mówimy wtedy, że funkcja $f(x)$ dąży do $+\infty$, gdy zmienna x zmierza do $+\infty$, czyli że funkcja dąży do $+\infty$, wraz ze zmienną.

Przykłady: funkcja $y = \operatorname{tg} x$ w punkcie $x = \frac{\pi}{2}$ lewostronnie dąży do $+\infty$, prawostronnie dąży do $-\infty$; funkcja $y = \operatorname{Arc\,tg} x$ dąży do $\frac{\pi}{2}$, gdy $x \to +\infty$ i dąży do $-\frac{\pi}{2}$, gdy $x \to -\infty$; funkcja $y = \frac{1}{x}$ dąży do $-\infty$ w punkcie $x = 0$ lewostronnie, a do $+\infty$ prawostronnie; $y = \frac{1}{x^2}$

dąży do $+\infty$ w punkcie $x=0$, czyli $\to +\infty$ i lewostronnie i prawostronnie.

Uwaga. Jeżeli $f(x)$ dąży do $+\infty$, gdy x dąży do a lewostronnie, to niektórzy autorowie oznaczają to, pisząc

$$f(a-0)=+\infty;$$

jeżeli ma to miejsce prawostronnie, to można napisać

$$f(a+0)=+\infty.$$

Podobne znaczenie mają wyrażenia $f(a-0)=-\infty$ i $f(x+0)=-\infty$.

Jeżeli $f(x)$ dąży do granicy g, gdy x dąży do $+\infty$, to możemy ten fakt zaznaczyć, pisząc: $f(+\infty)=g$. Podobne znaczenie ma $f(-\infty)=g$.

Tak, np., $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=+\infty$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=-\infty$; jeżeli $f(x)=x^2$, to $f(+\infty)=+\infty$, $f(-\infty)=+\infty$; jeżeli $f(x)=+x^3$, to $f(+\infty)=+\infty$, $f(-\infty)=-\infty$.

Należy pamiętać, że te wyrażenia mają charakter zupełnie konwencjonalny i nic więcej nie zawierają w sobie poza treścią, jaką tym symbolom nadaliśmy przez definicję. Dzięki nim możemy wysłowieniu niektórych twierdzeń nadać większą prostotę i jednolitość, nic nie tracąc na ścisłości i jasności i bez wywołania nieporozumień. Tak, np. $f(\pm\infty=\pm\infty)$ oznacza, że do każdej liczby M można dobrać taką liczbę L, że $x>L$ pociąga zawsze $f(x)>M$; a do każdej liczby m można dobrać taką liczbę l, że $x<l$ pociąga zawsze $f(x)<m$; jeżeli, np., $f(x)=x^3$, to wystarczy wziąć $L>\sqrt[3]{M}$, jeśli $M>1$ i $x>L$, a $L>1$, jeżeli $M\leqslant 1$; wtedy $x>L$, pociąga $x^3>L^3$, czyli istotnie $x^3>M$; jako l możemy wziąć $l<\sqrt[3]{m}$, jeżeli $m<-1$, a $l<-1$, jeżeli $m\geqslant -1$.

Ćwiczenie. Zbadać dla każdej z funkcyj, której wykres otrzymany był poprzednio (l. 64) drogą graficzną, istnienie granicy lub granicy lewo i prawostronnej w punkcie $x=0$.

67. *Wnioski związane z pojęciem granicy funkcji.*

Jeżeli istnieje lewostronna granica w punkcie a, t. j. jeżeli istnieje $f(a-0)$ i jeżeli $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$ stanowi ciąg rosnący, którego granica równa się a, przyczem wartości $x_1, x_2, x_3, \ldots$ należą do przedziału (m, n), w którym funkcja $f(x)$ jest określona, to ciąg $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_3), \ldots$ jest zbieżny i $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a-0)$.

Jeżeli istnieje granica $f(a+0)$ i jeżeli ciąg malejący $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots$ dąży do a, to ciąg $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ jest zbieżny i $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a+0)$.

Czytelnik z łatwością uzasadni te wnioski. Czytelnik odpowie także na pytanie następujące: czy warunek, by ciąg, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ był rosnący w pierwszym przypadku, malejący w drugim, jest istotny? jeżeli nie, to czem można te warunki zastąpić?

Jeżeli $x_n < a$ i $x_n \to a$, i jeżeli ciąg $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ nie posiada granicy, to funkcja $f(x)$ w punkcie a granicy lewostronnej nie posiada.

Jeżeli $x_n > a$ i $x_n \to a$ i jeżeli ciąg $f(x_1), f(x_2)$ $f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ nie zmierza do granicy, to funkcja $f(x)$ w punkcie a granicy prawostronnej nie posiada.

Jest to tylko inne sformułowanie poprzednich dwóch wniosków.

Niech, np., $f(x) = \sin\frac{1}{x}$; $x_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}$; ciąg $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots$ w tym przypadku staje się $\ldots +1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$ Stąd wniosek, że funkcja nie posiada w punkcie $x=0$ granicy prawostronnej, tak samo przekonać się można, że niema granicy lewostronnej.

Jeżeli $x_n \to a$, a ciąg $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ posiada granicę, t. j. $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$ istnieje, to stąd nie wynika istnienie granicy funkcji $f(x)$ w punkcie a, ani lewostron-

nej ani prawostronnej. Naprzykład, niech $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, a $x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$; wtedy ciąg $f(x_1), f(x_2) \ldots f(x_n), \ldots$ składa się z liczb równych jedności i $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, chociaż, jak wiemy, funkcja w punkcie $x=0$ granicy lewostronnej ani prawostronnej nie posiada.

Określenie. Funkcja $f(x)$ jest rosnąca z lewej strony punktu a, jeżeli istnieje przedział $(a-h, a)$, taki że

$$a-h < x' < x'' < a$$

pociąga nierówność

$$f(x') < f(x'').$$

Funkcja jest malejąca z lewej strony punktu a, jeżeli przy spełnieniu tych samych warunków na x' i x'', zawsze

$$f(x') > f(x'')$$

Tak samo określimy, co znaczy, że funkcja $f(x)$ jest rosnąca lub malejąca z prawej strony punktu a.

Funkcja jest monotoniczna na prawo, ewentualnie na lewo od punktu a, jeżeli warunek

$$a < x' < x'' < a+h,$$

lub ewentualnie warunek

$$a-h < x' < x'' < a,$$

pociąga bądź zawsze $f(x') \leqslant f(x'')$, bądź zawsze

$$f(x') \geqslant f(x').$$

Jeżeli funkcja jest *monotoniczna* na lewo od punktu a, to *granica lewostronna* w *punkcie a istnieje* i równa się liczbie skończonej, albo też $+\infty$, albo $-\infty$.

W rzeczy samej, niech $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Ciąg $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ jest monotoniczny, więc albo $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$, albo też $f(x_n) \to +\infty$,

albo też $f(x_n) \to -\infty$, (patrz l. 30). Jeżeli $f(x_n) \to +\infty$, to do każdej liczby M można dobrać $\eta > 0$ tak, by

$$a - \eta < x < a \text{ pociągało } f(x) > M;$$

w rzeczy samej istnieje taki wskaźnik n_0, iż $n \geqslant n_0$ pociąga $f(x_n) > M$; wystarczy więc wziąć η tak, by

$$0 < \eta < a - x_{n_0};$$

z nierówności $x_{n_0} < a - \eta < x < a$ wynika $f(x) \geqslant f(x_{n_0}) > M$, gdyż ciąg monotoniczny, dążący do $+\infty$ jest ciągiem nigdy nie malejącym. A więc $f(x-0) = +\infty$.

Tak samo udowodnimy, że, jeżeli $f(x_n) \to -\infty$, to $f(a-0) = -\infty$.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$, to mogą zajść następujące możliwości: 1) dla pewnego wskaźnika $n = \nu$, $f(x_\nu) = g$, w takim razie $f(x) = g$ dla każdej wartości $x_\nu \leqslant x < a$ i twierdzenie jest udowodnione; 2) albo $f(x_n) < g$ dla każdego wskaźnika m; wtedy $x_n \leqslant x < a$ pociąga $f(x_n) \leqslant f(x) < g$; dowolnej liczbie $\varepsilon > 0$ podporządkujemy taki wskaźnik n_o, że $a < g - f(x_n) < \varepsilon$ dla każdego $n \geqslant n_o$; wtedy $x_{n_0} \leqslant x < a$ pociąga za sobą

$$0 < g - f(x) \leqslant g - f(x_{n_0}) < \varepsilon,$$

co dowodzi, że $\qquad f(a-0) = g.$

3) Albo też $f(x_n) > g$ dla każdego n; wtedy $x_n \leqslant x < a$ pociąga $f(x_n) \geqslant f(x) > g$; dowolnej liczbie $s > 0$ możemy podporządkować taki wskaźnik n_o, że zachodzi nierówność

$$0 < f(x_n) - g < \varepsilon \text{ dla każdego } n \geqslant n_o;$$

wtedy $x_{n_0} \leqslant x < a$ pociąga nierówność

$$a < f(x) - g \leqslant f(x_{n_0}) - g < \varepsilon,$$

co dowodzi, że $\qquad f(a-0) = g.$

Czytelnik wysłowi i udowodni analogiczne twierdzenie dla funkcji monotonicznej na prawo od punktu a.

Możemy uzupełnić te twierdzenia następującą uwagą: jeżeli funkcja jest lewostronnie monotoniczna i ograniczona

od góry i od dołu, to $f(a-0)$ istnieje i równa się jakiejś liczbie g; jeżeli funkcja jest lewostronnie monotoniczna i jeśli nie jest ograniczona od góry w żadnem otoczeniu lewostronnem punktu a, to granicą lewostronną jest $+\infty$, t. j. funkcja lewostronnie rośnie do $+\infty$; jeżeli funkcja jest lewostronnie monotoniczna i jeżeli nie jest ograniczona w żadnem otoczeniu lewostronnem punktu a od dołu, to funkcja lewostronnie maleje do $-\infty$, t. j. $f(a-0)=-\infty$. Czytelnik wysłowi i udowodni analogiczne własności dla funkcji monotonicznej i ograniczonej z prawej strony punktu a.

Podobieństwo tych własności granicy funkcji w punkcie, do analogicznych własności granicy ciągu, (patrz 1. 30) rzuca się samo w oczy.

Analogiczne własności dla funkcji monotonicznej w otoczeniu punktu $+\infty$, albo punktu $-\infty$.

Jeżeli funkcja jest określona dla każdej wartości $x>l$ i jeżeli $l<x'<x''$ pociąga $f(x')\leqslant f(x'')$, to $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ równa się liczbie skończonej g, albo $+\infty$.

Jeżeli funkcja jest określona dla każdej wartości $x>l$ i jeżeli $l<x'<x''$ pociąga $f(x')\geqslant f(x'')$, to $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ równa się liczbie skończonej g albo $-\infty$.

Jeżeli funkcja jest określona dla każdej wartości $x<l$ i jeżeli $l>x'>x''$ pociąga

$$f(x')\geqslant f(x''),$$

to $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ równa się liczbie skończonej g lub $-\infty$.

Jeżeli funkcja jest określona do każdej wartości $x<l$ i jeżeli $l>x'>x''$ pociąga

$$f(x')\leqslant f(x''),$$

to $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=g$ lub $+\infty$.

Jeżeli $\varphi_1(x)<f(x)<\varphi_2(x)$ w otoczeniu lewostronnem

punktu a, i jeżeli $\varphi_1(a-0)=\varphi_2(a-0)$, to $f(a-0)$ istnieje i równa się także g.

Jeżeli $\varphi_1(x)<f(x)<\varphi_2(x)$ w otoczeniu prawostronnem punktu a i jeżeli granice $\varphi_1(a+0)$ i $\varphi_2(a+0)$ są równe, to granica $f(a+0)$ istnieje i równa się obu poprzednim.

Czytelnik wysłowi i uzasadni analogiczne twierdzenia w przypadku, gdy liczbę a zastąpimy przez $+\infty$ albo przez $-\infty$.

Jeżeli $f(a-0)$ istnieje i równa się liczbie $g>0$, to w lewostronnem otoczeniu punktu a funkcja $f(x)$ jest dodatnia.

Jeżeli granica $f(a-0)$ istnieje i jest równa liczbie $g<0$, to w lewostronnem otoczeniu punktu x funkcja $f(x)$ jest ujemna.

Jeżeli granica $f(a+0)$ jest >0, to w pewnem prawostronnem otoczeniu punktu a funkcja $f(x)$ jest ujemna.

Jeżeli $\lim\limits_{x\to a} f(x)=g>0$, to w pewnem otoczeniu (obustronnem) punktu a funkcja $f(x)$ jest dodatnia.

Jeżeli $\lim\limits_{x\to a} f(x)=g<0$, to w pewnem otoczeniu (obustronnem) punktu a funkcja $f(x)$ jest ujemna.

Jeżeli w dowolnie małem (np. obustronnem) otoczeniu punktu a funkcja $f(x)$ nie zachowuje stałego znaku i jeżeli $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ istnieje, to powyższa granica równa się 0.

Jeżeli $\lim\limits_{x\to a} f(x)=g$, to $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ istnieje i równa się $|g|$.

Jeżeli $\lim\limits_{x\to a} f(x)=g$, to $\lim\limits_{x\to a} \{-f(x)\}$ istnieje i równa się $-g$.

Jeżeli istnieje $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$, to stąd nie wynika jeszcze istnienie granicy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; n. prz.: funkcja równa $+1$ dla wymiernych wartości x i równa -1 dla niewymiernych, nie posiada granicy w żadnym punkcie, t. j. dla żadnej

wartości zmiennej x; natomiast w tym przypadku $|f(x)|=1$ dla każdej wartości a zmiennej x, tak że, $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=1$, lecz granica $f(x)$ w punkcie a nie istnieje.

Czytelnik wysłowi i uzasadni szereg twierdzeń analogicznych do tylko co przytoczonych, z tą tylko zmianą, że zamiast granicy dla wartości $x=a$, występują własności granicy funkcji dla $x=+\infty$ albo dla $x=-\infty$.

68. *Granica sumy, iloczynu i ilorazu dwóch funkcyj.* Podamy teraz szereg własności, które podobnie jak i poprzednie (l. 67) wynikają bezpośrednio z określenia granicy; twierdzenia te są zupełnie podobne do analogicznych twierdzeń z teorji ciągów i dowód ich jest również analogiczny. Wysłowimy je w tym wypadku, gdy zachodzi granica obustronna; czytelnik z łatwością wysłowi i udowodni te twierdzenia w przypadku, gdy istnieć będzie granica bądź lewostronna bądź prawostronna.

Jeżeli $\lim\limits_{x\to a} f(x)=g_1$, a $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=g_2$, to

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+\varphi(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}\varphi(x)=g_1+g_2.$$

Z założeń wynika istnienie takiego otoczenia punktu a, że $|f(x)-g_1|<\frac{\varepsilon}{2}$ i $|\varphi(x)-g_2|<\frac{\varepsilon}{2}$, o ile x należy do tego otoczenia. Ponieważ

$$f(x)+\varphi(x)-(g_2+g_2)=(f(x)-g_1)+(\varphi(x)-g_2),$$

więc $|\{f(x)+\varphi(x)\}-(g_1+g_2)|\leqslant|f(x)-g_1|+|\varphi(x)-g_2|$,

czyli
$$|\{f(x)+\varphi(x)\}-(g_1+g_2)|<\varepsilon$$

dla każdej wartości x w otoczeniu powyższem punktu a, t. j. $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+\varphi(x)\}=g_1+g_2$, co należało udowodnić.

Udowodnione twierdzenie można krótko wysłowić w następujący sposób: granica sumy dwóch funkcyj równa sumie granic tych funkcyj. Podany dowód uwydatnia podobieństwo z analogicznym dowodem dla granicy ciągu.

Mamy tu i tam podobne nierówności, i tu i tam operujemy niemi jednakowo; cała różnica polega na tem, że te nierówności zachodzą tu, gdy x znajduje się w otoczeniu punktu a, t. j. w pewnym przedziale, gdy tymczasem w teorji ciągów te same nierówności zachodzą, gdy zmienna (liczba całkowita dodatnia) n jest większa od pewnego wskaźnika n_0.

W przypadku, gdy mamy do czynienia z granicą dla $x \to \infty$, j. przy dowodzie twierdzenia

$$\lim_{x \to +\infty} \{f(x) + \varphi(x)\} = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} \varphi(x),$$

przy założeniu, że granice po stronie prawej znaku równości istnieją, analogja staje się jeszcze bardziej wyraźną, gdyż przynależność do otoczenia w tym wypadku wyraża się nierównością $x > x_0$, niczem w zasadzie nie różniącą się od nierówności $n_0 > n$; jedyna więc różnica w tym przypadku polega na tem, że w teorji granic mamy do czynienia z wartościami całkowitemi zmiennej, gdy dla funkcji $f(x)$ określonej dla wartości kontinuum liczbowego tego warunku ograniczającego już niema, x może być jakąkolwiek liczbą rzeczywistą większą od pewnej liczby x_0. Przejawia się tu okoliczność, że teorja ciągów jest teorją granic funkcyj zmiennej całkowitej n w przypadku, gdy ta zmienna dąży do nieskończoności.

Z powodu tego zasadniczego podobieństwa nie będziemy dowodzili odnośnych twierdzeń dla iloczynu i ilorazu dwóch funkcji, poprzestaniemy na wysłowieniu.

Jeżeli $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g_1$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = g_2$, to

$\lim\limits_{x \to a} \{f(x) \cdot \varphi(x)\} = \{\lim\limits_{x \to a} f(x)\} \cdot \{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)\} = g_1 \cdot g_2$; czyli granica iloczynu dwóch funkcyj równa się iloczynowi granic czynników t. j. tych funkcyj.

Jeżeli $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g_1$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = g_2$, i jeżeli $g_2 \neq 0$, to

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim \varphi(x)} = \frac{g_1}{g_2};$$

czyli granica ilorazu dwóch funkcyj równa się ilorazowi granic tychże funkcyj, z zastrzeżeniem, że granica funkcji która występuje jako dzielnik, jest różna od zera.

Możemy z łatwością określić granicę ilorazu dwóch funkcyj w przypadku, gdy $f(x)$ jest w otoczeniu punktu a ograniczona od góry i od dołu, a $\varphi(x)$ rośnie do nieskończoności; wtedy, oczywiście $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.

Jeszcze jeden przypadek, gdzie wyznaczenie granicy nie przedstawia trudności. Przypuśćmy, że $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g_1 \neq 0$, a $\varphi(x)$ dąży do zera, przyczem funkcja $\varphi(x)$ w otoczeniu punktu $x = a$ zachowuje stały znak; wtedy $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ dąży do $+\infty$ albo do $-\infty$, zależnie od tego, czy ten stały znak jest taki sam jak przy g_1, czy też przeciwny. Nie jest zresztą koniecznem, by $f(x)$ dążyło do granicy w punkcie a; wystarczy, by w otoczeniu punktu a funkcja $f(x)$ spełniała warunek $f(x) > \delta > 0$ lub $f(x) < \delta < 0$; czytelnik sprawdzi, że przy spełnieniu tego samego warunku $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ z zachowaniem stałego znaku, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ dąży do $+\infty$, albo do $-\infty$.

Pozostaje niewyjaśnionem, jak zbadać zachowanie się ilorazu $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ w otoczeniu punktu $x = a$, gdy licznik i mianownik jednocześnie dążą do zera lub jednocześnie dążą do nieskończoności; o tem będzie mowa później (patrz l. 106).

Zagadnienie, którem zajmowaliśmy się tutaj, jest przypadkiem szczególnym zagadnienia następującego: gdy x dąży do a, granicą (obustronną) funkcji $y = f(x)$ jest b; gdy x dąży do b, funkc

$y = \varphi(x)$ dąży do granicy g. Jak się zachowuje funkcja złożona $\varphi\{f(x)\}$ w otoczeniu punktu $x = a$. Na pierwszy rzut oka zdawaćby się mogło, że w tym przypadku zawsze

$$\lim_{x \to a} \varphi\{f(x)\} = g$$

gdyż w otoczeniu punktu a funkcja $f(x)$ zbliża się do b tyle, ile wymaga dowolna miara przybliżeń ε, t. j. $f(x)$ jako zmienna w $\varphi\{f(x)\}$ należy do otoczenia punktu b, wskutek czego $\varphi\{f(x)\}$ znowu zbliża się do g tyle, ile wymaga dowolnie mała miara przybliżeń. Zauważmy jednak, że pomimo założenia $\varphi(x) \to g$, gdy $x \to b$, wartość funkcji $\varphi(x)$ w punkcie b, t. j. $\varphi(b)$ może nie być oznaczona, albo też $\lim_{x \to b} \varphi(x) = g$ może nie równać się $\varphi(b)$, tymczasem funkcja $f(x)$ może w otoczeniu punktu a przyjmować nie tylko wartości dowolnie mało różniące się od b, ale nawet równe właśnie b; w takim razie funkcja złożona $\varphi\{f(x)\}$ będzie w otoczeniu punktu a (mowa tu zawsze o otoczeniu obustronnem), przyjmowała między innemi wartość $\varphi(b) \neq g$, wskutek czego g nie może być granicą funkcji $\varphi\{f(x)\}$ w punkcie a.

Rozpatrzmy następujący przykład: $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, funkcja zaś $\varphi(x)$ równa się 1 dla każdej wartości $x \neq 0$, zaś dla $x = 0$, funkcja przyjmuje wartość zero; zbadajmy funkcję $\varphi\{f(x)\}$ w otoczeniu punktu $x = 0$. Łatwo się przekonać, że $\lim_{x \to} x \sin\frac{1}{x} = 0$, gdyż $\left| x \sin\frac{1}{x} \right| \leqq |x|$; w dowolnie małem otoczeniu punktu $x = 0$ nasza funkcja $f(x)$ przyjmuje wartość zero, mianowicie w punktach $x = \frac{1}{k\pi}$, gdzie $k \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; zero jest punktem skupienia dla tego zbioru $\pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi}, \ldots, \pm\frac{1}{n\pi}, \ldots$ wskutek czego, istotnie, w dowolnie małem otoczeniu $x = 0$ takie punkty znaleźć się muszą. Dla tych wartości zmiennej x, t. j. dla $x = \frac{1}{k\pi}$, funkcja złożona $\varphi\{f(x)\}$ równa się także 0, tymczasem dla wszystkich innych wartości x, różnych jednocześnie od zera, funkcja $\varphi\{f(x)\} = 1$. Tak więc w dowolnie małem otoczeniu punktu zerowego są wartości zmiennej dla których $\varphi\{f(x)\}$ przyjmuje wartość 1 i także wartości zmiennej, dla których $\varphi\{f(x)\}$ równa się zeru. Stąd wniosek, że $\varphi\{f(x)\}$ nie dąży do żadnej granicy dla $x = 0$.

Założenie więc, iż $f(x) \to b$ dla $x \to a$, $\varphi(x) \to g$ dla $x \to b$ nie wystarcza do wniosku, iż $\varphi\{f(x)\} \to g$ dla $x \to a$. Wniosek ten jednak będzie słuszny, jeżeli założymy dodatkowo: 1) albo, że $f(x)$, choć zmierza do b dla $x \to a$, jednak w otoczeniu punktu $x = a$ nie zachodzi nigdy równość $f(x) = b$; 2) albo, że funkcja $\varphi(x)$ zbliża się do g tyle, ile wymaga dowolnie mała miara przybliżeń ε, o ile zmienna x należy do „otoczenia" punktu b w „szerszem" znaczeniu tego słowa, t. j. przy włączeniu także i samego punktu b do przedziału, stanowiącego „otoczenie"; w takim razie nie tylko $\varphi(x) \to g$, gdy $x \to b$, ale i $\varphi(b) = g$, (patrz l. 70, ciągłość funkcji).

89. *Warunek konieczny i dostateczny istnienia granicy.* Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ jest ograniczona w przedziale (m, n); niech a będzie dowolnym punktem tego przedziału z wyjątkiem punktu $n\,(n > m)$. Zbiór wartości funkcji $f(x)$ w przedziale $(a, a + \eta)$ jest ograniczony, istnieje więc kres górny K_η i kres dolny k_η wartości $f(x)$ w tym przedziale (patrz l. 62). Oba te kresy K_η i k_η są funkcjami zmiennej dodatniej η, tak, że dla każdej wartości zmiennej x, spełniającej warunek

$$a < x \leqslant \eta \leqslant n,$$

zachodzą nierówności

$$m < k_\eta \leqslant f(x) \leqslant K_\eta < M,$$

gdzie M i m są stałe (niezależne od η).

Funkcje K_η i k_η są funkcjami monotonicznemi zmiennej η, t. j. jeżeli $\eta' < \eta$, to $K_{\eta'} \leqslant K_\eta$, a $k_{\eta'} \geqslant k_\eta$, (patrz l. 62). Obie te funkcje są ograniczone (od góry i od dołu); więc istnieją granice $\lim\limits_{\eta \to 0} K_\eta = K_{a+0}$, $\lim\limits_{\eta \to 0} k_\eta = k_{a+0}$ (patrz l. 67). Granice te K_{a+0} i k_{a+0} nazywać będziemy odpowiednio: największą i najmniejszą prawostronną granicą funkcji w punkcie a.

Liczby K_{a+0} i k_{a+0} posiadają następujące własności, które są dla nich charakterystyczne, t. j. określają te liczby w zupełności.

Każdej liczbie dodatniej (dowolnie małej) ε podpo-

rządkować można taką liczbę dodatnią η, iż dla każdej wartości x, spełniającej warunek

(4) $$a < x \leqslant a + \eta < n$$

zachodzą nierówności

$$k_{a+0} - \varepsilon < f(x) < K_{a+0} + \varepsilon,$$

przyczem w prawostronnem otoczeniu punktu a. t. j. w przedziale

$$a < x \leqslant a + h \leqslant a + \eta,$$

(gdzie h jest dowolnie małą liczbą dodatnią), istnieją wartości zmiennej, dajmy na to x' i x'', spełniające odpowiednio nierówności

(5) $$f(x') > K_{a+0} - \varepsilon \quad \text{i} \quad f(x'') < k_a + \varepsilon.$$

Dowód jest następujący:

O ile η jest liczbą dodatnią, dostatecznie małą, to w przedziale $a < x \leqslant a + \eta$

(6) $$k_\eta \leqslant f(x) \leqslant K_\eta;$$

lecz $\lim\limits_{\eta \to 0} K_\eta = K_{a+0}$, $\lim\limits_{\eta \to 0} k_\eta = k_{a+0}$; jeżeli więc η jest dostatecznie małe, to

(8) $$K_{a+0} + \varepsilon > K_\eta \geqslant K_{a+0},$$
$$k_{a+0} - \varepsilon < k_\eta \leqslant k_{a+0};$$

te ostatnie nierówności (7) w zestawieniu z (6) dają:

$$k_{a+0} - \varepsilon < f(x) < K_{a+0} + \varepsilon,$$

t. j. (4).

Z określenia kresu górnego K_h wynika istnienie wartości x' zmiennej x, spełniającej warunki

$$x < x' \leqslant a + h \leqslant a + \eta,$$
$$f(x') > K_\eta - \varepsilon \geqslant K_{a+0} - \varepsilon,$$

czyli że dla $x = x'$ w przedziale $(a, a + h)$ spełniona jest pierwsza z nierówności (5).

Z określenia kresu dolnego k_η wynika istnienie takiej wartości x'' zmiennej x, która spełnia warunki

$$a < x'' > a + h \leqslant a + \eta.$$

$$f(x'') < k_\eta + \varepsilon \leqslant k_{a+0} + \varepsilon,$$

czyli że dla $x = x''$ w przedziale $(a,\ a + h)$ spełniona jest druga z nierówności (5).

Przez sprowadzenie do sprzeczności czytelnik udowodni, że warunki, wyrażające się nierównościami (4) i (5) określają w punkcie a liczby K_{a+0} i k_{a+0} jednoznacznie.

Jeżeli przedział prawostronny zastąpimy przedziałem lewostronnym, to w ten sam sposób udowodnimy istnienie w punkcie a dwóch liczb K_{a-0} i k_{a-0}, spełniających takie same warunki, ale dla wartości, zmiennej w otoczeniu lewostronnem punktu a.

Ponieważ rozważania, tyczące się otoczenia lewostronnego i prawostronnego są w zasadzie identyczne, możemy poprzestać przy dowodach na rozpatrywaniu jedynie np. otoczenia prawostronnego.

Możemy teraz udowodnić, że funkcja $f(x)$ posiada w punkcie a granicę prawostronną wtedy i tylko wtedy, gdy obie liczby K_{a+0} i k_{a+0} są sobie równe; wtedy $f(a+0)$ równa się wspólnej wartości tych liczb K_{a+0} i k_{a+0}.

W rzeczy samej, niech $K_{a+0} = k_{a+0} = g$; w tych warunkach nierówność (4) wskazuje, że zachodzi nierówność

$$|f(x) - g| < \varepsilon$$

w otoczeniu prawostronnem punktu a, jakkolwiek małą byłaby liczba ε. Stąd wniosek, że $f(a+0)$ istnieje i równa się g.

Odwrotnie, przypuśćmy że $f(a+0)$ istnieje i równa się liczbie g.

W otoczeniu prawostronnem punktu a, t. j. gdy zmienne x' i x'' należą do tego otoczenia

$$|f(x') - g| < \varepsilon/2,$$

$$|f(x'') - g| < \varepsilon/2:$$

stąd wynika, że $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Otrzymana nierówność pociąga za sobą oczywiście

$K_{a+0}=k_{a+0}$; gdyby bowiem było $K_{a+0}>k_{a+0}$, to istniałyby takie wartości zmiennej x, dajmy na to x' i x'', należące do otoczenia prawostronnego punktu a, które spełniają nierówność

$$f(x')<k_{a+0}+\varepsilon$$
$$f(x'')>K_{a+0}-\varepsilon$$

stąd $|f(x'')-f(x')|>K_{a+0}-k_{a+0}-2\varepsilon>0$, o ile ε dostatecznie małe; jeżeli teraz obierzemy $\varepsilon<\frac{1}{3}\{K_{a+0}-k_{a+0}\}$, to poprzednia nierówność da nam

$$(9) \qquad |f(x'')-f(x')|>\varepsilon,$$

gdyż x'' i x' należą do otoczenia prawostronnego punktu a, t. j. w dowolnie małym przedziale $(a, a+h)$, z wyłączeniem punktu a, istnieją zawsze wartości x'' i x', spełniające nierówność (9) (oczywiście, o ile $k_{a+0}\neq K_{a+0}$). Lecz nierówność (9) jest sprzeczna z nierównością (8), która musi być spełniona dla dowolnych dwóch wartości x' i x'' w dostatecznie małym przedziale $(a, a+\eta)$, niezawierającym punktu a, o ile $f(a+0)$ istnieje. Tak więc istnienie granicy $f(a+0)$ nie da się logicznie pogodzić z warunkiem $k_{a+0}\neq K_{a+0}$; a więc, jeżeli $f(a+0)$ istnieje, to $k_{a+0}=K_{a+0}$.

Tak samo udowodnimy, że warunkiem koniecznym i dostateczym istnienia granicy $f(a+0)$ jest $k_{a-0}=K_{a-0}$.

Stąd możemy otrzymać następujące, bardzo ważne w zastosowaniach kryterjum konieczne i dostateczne istnienia granicy funkcji w punkcie a, granicy prawostronnej, względnie lewostronnej lub obustronnej.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia granicy $f(a+0)$ dla funkcji $f(x)$, ograniczonej w prawostronnem otoczeniu punktu a, jest kryterjum następujące: *do każdej dowolnej liczby dodatniej* ε *można dobrać taką liczbę dodatnią* η, *że dwie jakiekolwiek wartości* x'' *i* x' *zmiennej* x *należące do przedziału* $(a, a+\eta)$, *z którego*

punkt a został wykluczony, spełniają zawsze nierówność

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

Wysłowiony co tylko warunek konieczny i dostateczny zawiera w sobie dwa twierdzenia, proste i odwrotne, mianowicie:

1) Jeżeli $f(a+0)$ istnieje, to jakąkolwiek jest liczba dodatnia ε, zawsze w jakiemś prawostronnem otoczeniu punktu a spełniony jest warunek (10).

2) Jeżeli w prawostronnem otoczeniu punktu a spełniony jest dla każdej dowolnej wartości dodatniej ε warunek (10), to funkcja jest ograniczona w otoczeniu prawostronnem punktu a i granica $f(a+0)$ istnieje.

Pierwsze z tych dwóch twierdzeń było już udowodnione, gdyż warunek (10) jest identyczny z warunkiem (8). Pozostaje więc do udowodnienia tylko drugie.

Ustalmy x', wtedy z warunku (10) wynika, że dla każdej wartości x'' w prawostronnem otoczeniu punktu a zachodzi nierówność

$$f(x')-\varepsilon<f(x'')<f(x')+\varepsilon,$$

co dowodzi, że funkcja $f(x)$ jest ograniczona od góry i od dołu w pewnem prawostronnem otoczeniu punktu a. A więc liczby k_{a+0} i K_{a+0} istnieją. Powiadam teraz, że z warunku (10) wynika, iż $k_{a+0}=K_{a+0}$; w rzeczy samej, warunek (10) jest identyczny z warunkiem (8), z którego jak widzieliśmy przed chwilą, wynika $k_{a+0}=K_{a+0}$; lecz ta ostatnia równość pociąga istnienie granicy $f(a+0)$, równej wspólnej wartości tych liczb k_{a+0} i K_{a+0}.

Czytelnik z łatwością wysłowi i udowodni odpowiednie kryterjum konieczne i dostateczne istnienia granicy lewostronnej $f(a-0)$.

Tak samo nie przedstawia trudności wysłowienie i udowodnienie kryterjum koniecznego i dostatecznego istnienia granicy obustronnej. Wtedy wszystkie cztery liczby k_{a+0},

K_{a+0}, k_{a-0}, K_{a-0} są sobie równe i równe wspólnej wartości $f(a+0)$ i $f(a-0)$.

Uwaga. Różnicę $K_{a+0}-k_{a+0}$ niektórzy nazywają oscylacją prawostronną funkcji $f(x)$ w punkcie a, różnicę $K_{a-0}-k_{a-0}$, oscylacją lewostronną funkcji $f(x)$ w punkcie a.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest wyznaczona i ograniczona dla wszystkich wartości $x \geqslant l$, gdzie l jest liczbą dowolnie wielką, czyli jeżeli $f(x)$ jest, krótko mówiąc, wyznaczona i ograniczona w otoczeniu punktu $+\infty$, to możemy wzorując się na poprzedniem, określić dwie liczby $k_{+\infty}$ i $K_{+\infty}$.

Niech K_l i k_l oznaczają kres górny i dolny zbioru (Y) wartości funkcji $f(x)$, dla wszystkich wartości zmiennej x, spełniających warunek $x \geqslant l$.

Gdy $l \to \infty$, K_l jako funkcja ograniczona i monotoniczna zmiennej l, dąży do granicy, którą oznaczymy przez $K_{+\infty}$; w tych samych warunkach k_l dąży do granicy $k_{+\infty}$, przyczem, oczywiście, $K_l \geqslant K_\infty$, $k_l \leqslant k_\infty$.

Każdej liczbie dodatniej dowolnie małej ε odpowiada liczba l taka, że w przedziale $(l, +\infty)$ t. j. dla wartości zmiennej x, spełniających warunek $x \geqslant l$, zachodzi nierówność:

$$k_\infty - \varepsilon < f(x) < K_\infty + \varepsilon,$$

przyczem, jakkolwiek wielką jest liczba $M \geqslant l$, w przedziale $(M, +\infty)$ czyli w otoczeniu punktu $+\infty$, istnieją zawsze takie wartości x'' i x' zmiennej x, że

$$f(x'') > K_\infty - \varepsilon$$
$$f(x') < k_\infty + \varepsilon.$$

Granica $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $k_\infty = K_\infty$ i równa się wówczas wspólnej wartości tych dwóch liczb.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia granicy $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ jest kryterjum następujące: *każdej dowolnej liczbie dodatniej* ε *odpowiada liczba* l *taka, że dla każdej*

pary x'' i x' wartości zmiennej x należących do przedziału $(l, +\infty)$ *spełniona jest nierówność*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest wyznaczona i ograniczona w otoczeniu punktu $-\infty$, to możemy w podobny sposób określić liczby $K_{-\infty}$ i $k_{-\infty}$. Czytelnik wysłowi i udowodni odpowiednie kryterjum istnienia granicy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Jeżeli funkcja $f(x)$ nie jest ograniczona, np. od góry, w prawostronnem otoczeniu punktu a, to liczba K_{a+0} w znaczeniu poprzedniem nie istnieje. Możemy jednak dla jednostajności wysłowień wyrazić ten fakt nie przez zaprzeczenie istnienia liczby, wyrażonej przez symbol K_{a+0}, lecz przez przyrównanie K_{a+0} do $+\infty$; tak więc, orzeczenie „K_{a+0} równa się $+\infty$" uważać będziemy za równoznaczne z orzeczeniem, że $f(x)$ nie jest ograniczona od góry w otoczeniu prawostronnem punktu a. Tak samo, orzeczenie „k_{a+0} równa się $-\infty$" uważać będziemy za równoważne orzeczeniu, że $f(x)$ nie jest ograniczona od dołu w otoczeniu prawostronnem punktu a. Jeżeli więc $K_{a+0} = +\infty$, oznacza, że jakkolwiek wielką jest liczba M, istnieją wartości x' zmiennej x, które spełniają warunek

$$f(x') > M$$

w prawostronnem otoczeniu punktu a.

Tak samo $k_{a+0} = -\infty$ oznacza że, jakkolwiek małą byłaby liczba m, to jednak istnieją w prawostronnem otoczeniu punktu a wartości x'' zmiennej x, które spełniają warunek

$$f(x'') < m.$$

Zgodnie z tem, orzeczenie $K_{a+0} = -\infty$ będzie dla nas wyrażało ten fakt, że liczba K_η, określona poprzednio, dąży do $-\infty$, gdy $\eta \to 0$. Ponieważ $k_\eta \leqslant K_\eta$, więc i k_η dąży do $-\infty$; w tym przypadku, jakkolwiek małą jest liczba m, funkcja $f(x)$ w otoczeniu prawostronnem punktu a, jest

mniejsza od m. Tak więc $k_{a+0}=K_{a+0}=-\infty$ wyraża tę samą treść, co $f(a+0)=-\infty$.

Orzeczenie, że $k_{a+0}=+\infty$, oznaczać będzie podobnież, że jakkolwiek wielką jest liczba M, funkcja $f(x)$ w otoczeniu prawostronnem punktu a jest większa od M. Tak więc $k_{a+0}=K_{a+0}=+\infty$ wyraża tę samą treść, co

$$f(a+0)=+\infty,$$

t. j. że funkcja $f(x)$ w prawostronnem otoczeniu punktu a zmierza do $+\infty$.

Dla wypróbowania swoich sił, czytelnik powinien, wzorując się na poprzedniem, w podobny sposób ustalić, co wyrażają orzeczenia następujące:

„k_{a-0} równa się $-\infty$", „K_{a-0} równa się $+\infty$",
„k_{a-0} równa się $+\infty$", „K_{a-0} równa się $-\infty$".

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona w przedziale $(l, -\infty)$, to czytelnik powinien nadać sens orzeczeniom następującym:

$$„K_{+\infty}=+\infty“, \quad „k_{+\infty}=-\infty“,$$
$$„K_{+\infty}=-\infty“, \quad „k_{+\infty}=+\infty“.$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona w przedziale $(-\infty, l)$, to czytelnik ustali, co znaczą orzeczenia:

$$„K_{-\infty}=+\infty“, \quad „k_{-\infty}-\!-\infty“,$$
$$„K_{-\infty}=-\infty“, \quad „k_{-\infty}=+\infty“.$$

Przykłady:

Posługując się własnościami elementarnemi funkcji $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x \operatorname{arc tg} x$, a wrazie potrzeby wykresami, otrzymanemi drogą graficznych konstrukcji (patrz l. 64), czytelnik zbada wartości, jakie mają w punkcie $a=0$ liczby K_{a+0}, k_{a+0}, K_{a-0}, k_{a-0} dla następujących funkcyj:

1) $y=\sin\frac{1}{x}$; tu $K_{a+0}=K_{a-0}=1$; $k_{a+0}=k_{a-0}=-1$.

2) $y = \operatorname{tg}\frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$; tu $K_{a+0} = K_{a-0} = +\infty$; $k_{a+0} = k_{a-0} = -\infty$.

3) $y = \sin^2\frac{1}{x}$; tu $K_{a+0} = K_{a-0} = 1$; $k_{a+0} = k_{a-0} = 0$.

4) $y = +1$, gdy x wymierne; $y = -1$. gdy x niewymierne; jak w przykładzie pierwszym; ale tu a może być nie tylko zerem, ale dowolne.

5) $y = \operatorname{tg}^2\frac{1}{x}$; tu $K_{a+0} = K_{a-0} = +\infty$; $k_{a+0} = k_{a-0} = 0$.

6) $y = \sin\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x}$; tu $K_{a+0} = 2$, $k_{a+0} = 0$; $K_{a-0} = 0$, $k_{a-0} = -2$.

7) $y = \sin\frac{1}{x} + e^{\frac{1}{x}}$; tu $K_{a+0} = k_{a+0} = \infty$; $K_{a-0} = +1$, $k_{a-0} = 1$.

Ćwiczenie:

Udowodnić, że można znaleźć ciąg malejący $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots$, spełniający warunek $x_n \to a$, taki że ciąg $f(x_2) < f(x_2) < f(x_3) < \ldots \ldots < f(x_n) < \ldots$ dąży do granicy K_{a+0}; można znaleźć ciąg malejący wartości zmiennej x, o granicy równej a, tak że ciąg $f(x_1) > f(x_2) > > f(x_3) > \ldots > f(x_n) > \ldots$ dąży do granicy k_{a+0}.

Wszystkie określenia i pojęcia, wyłożone w tym rozdziale, rozciągnąć na przypadek, gdy funkcja $f(x)$ jest określona nie w przedziale (m, n), do którego należy punkt a, lecz w dowolnym zbiorze wartości x, dla którego punkt a jest punktem skupienia.

Przedewszystkiem z łatwością możemy rozszerzyć pojęcie „otoczenia" punktu a w tym przypadku, a jeśli to zrobimy, to wszystkie rozważania poprzednie i określenia granicy $f(a+0)$ i $f(a-0)$, liczb K_{a+0}, K_{a-0} i t. d. z małemi zmianami dadzą się zastosować i w tym przypadku.

Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ jest określona w przedziale (m, n), do którego należy punkt a. W poprzednim ustępie badaliśmy wartości, które przyjmuje funkcja w sąsiedztwie, że tak powiem, punktu a, t. j. dla wartości dowolnie bliskich punktu a z lewej lub prawej strony lub z obu stron jednocześnie. Gdy istnieje granica $f(a+0)$, wszystkie wartości funkcji z prawej strony od a, t. j. w otoczeniu prawostron-

nem punktu a, zbliżają się do wartości liczbowej $f(a+0)$ dowolnie blisko, wykazując w ten sposób jakby pewną solidarność wzajemną: jeżeli zaś granica $f(a+0)$ nie istnieje, to $K_{a+0} > k_{a+0}$, o ile te liczby istnieją (co, jak wiemy, zawsze ma miejsce, gdy $f(x)$ jest funkcją ograniczoną w otoczeniu prawostronnem punktu a), albo też funkcja nie jest ograniczona w tem otoczeniu. Wtedy w prawostronnem otoczeniu punktu a istnieją wartości funkcji, które się różnią między sobą więcej niż δ, gdzie δ jest pewną określoną liczbą dodatnią; o ile K_{a+0} i k_{a+0} istnieją, to jako δ można wziąść każdą liczbę dodatnią mniejszą od różnicy $K_{a+0} - k_{a+0}$; w przypadku, gdy funkcja prawostronnie nie jest ograniczona, δ może się równać dowolnej liczbie dodatniej. Tak, np. w dowolnie małym przedziale $(0, \eta)$, (nie zawierającym punktu 0, dla którego $y = \sin\frac{1}{x}$ nie zostało nawet określone), funkcja

$$y = \sin\frac{1}{x},$$

przyjmuje wartości, które mogą różnić się między sobą o całe dwie jednostki. W rzeczy samej, zbiór wartości zmiennej x, spełniających warunek

$$y = 1, \text{ czyli } \sin\frac{1}{x} = 1,$$

z prawej strony punktu 0 stanowi zbiór:

$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots, \frac{2}{(4k+1)\pi}, \ldots;$$

zbiór wartości zmiennej x, spełniających warunek

$$y = -1, \text{ czyli } \sin\frac{1}{x} = -1,$$

z prawej strony punktu 0, jest następujący:

$$\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \ldots, \frac{2}{(4k+3)\pi}, \ldots$$

Oba te zbiory mają wspólny punkt skupienia 0. W otoczeniu prawostronnem punktu 0, jakkolwiek małym byłby odpowiedni przedział, istnieje nieskończenie wiele punktów x' pierwszego i nieskończenie wiele punktów x'' drugiego z tych zbiorów, przyczem $\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''} = 2$. Jak widać z tego przykładu, wartości funkcji w prawostronnem otoczeniu nie skupiają się koło jednej wartości, lecz przeciwnie rozsiewają się.

70. *Ciągłość funkcji.*

Określenia.

Funkcja jest *ciągła w punkcie a*, jeżeli jest określona w punkcie a i w otoczeniu punktu a i przytem granice $f(a-0)$, $f(a+0)$ istnieją i równają się wartości $f(a)$ funkcji w punkcie a.

Słowem: granica lewostronna, prawostronna i wartość funkcji w punkcie a muszą być sobie równe:

$$f(a+0)=f(a-0)=f(a).$$

Jeżeli choć tylko $f(a-0)=f(a)$, to mówimy, że zachodzi ciągłość lewostronna, jeżeli choć tylko $f(a+0)=f(a)$, to mówimy, że zachodzi ciągłość prawostronna.

Jeżeli funkcja jest określona tylko w przedziale (m, n), to, oczywiście w punkcie m może być mowa tylko o ciągłości lewostronnej, w punkcie n tylko o ciągłości lewostronnej.

Funkcja jest *ciągła w przedziale* (m, n) jeżeli jest *ciągła w każdym punkcie* przedziału (m, n).

Dla funkcji ciągłej w punkcie a otrzymujemy więc tę samą wartość $f(a)$ przez podstawienie na miejscu zmiennej x wartości liczbowej a, jak też przez przejście do granicy w wyrażeniu $f(x)$ dla $x \to a \, (x \gtreqless a)$.

Możemy to wyrazić w ten sposób:

Jeżeli $\lim x = a$, to $\lim f(x) = f(\lim x) = f(a)$.

Równość: $\lim f(x) = f(\lim x)$ zawiera całą treść pojęcia ciągłości. Formalnie można wysłowić to w sposób następujący:

Funkcja ciągła i tylko funkcja ciągła (w punkcie a) posiada tę własność, że symbol granicy i symbol funkcji można przestawić. To ostatnie ujęcie jest bardzo wygodne i pożyteczne w zastosowaniach. Przypuśćmy, np., że $\varepsilon(x) \to 0$ w punkcie a, i że funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie b; w takim razie

$$\lim_{x \to a} f\{b + \varepsilon(x)\} = f\{\lim [b + \varepsilon(x)]\} = f(b).$$

Jeżeli uprzytomnimy sobie, co znaczy $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (na mocy określenia granicy), dojdziemy z łatwością do nowego określenia ciągłości, równoważnego z określeniem poprzedniem: w otoczeniu punktu a funkcja $f(x)$ zbliża się do wartości $f(a)$ według dowolnej miary przybliżeń ε, t. j. każdej liczbie dodatniej dowolnie małej ε można podporządkować liczbę dodatnią η, taką, że skoro tylko

$$|x - a| < \eta,$$

to
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w punkcie a, jeżeli wartościom zmiennej x, należącym do otoczenia punktu a, odpowiadają wartości zmiennej y, należące do otoczenia punktu $y = f(a)$.

W interpretacji geometrycznej ciągłość w punkcie a wyraża się istnieniem w płaszczyźnie (x, y) prostokąta o wysokości dowolnie małej (2ε), wewnątrz którego znajdują się wszystkie punkty obrazu geometrycznego danej funkcji w paśmie wykrojonem przez dwie równoległe do osi y, a mianowicie $y = a - \eta$ i $y = a + \eta$. Albo inaczej, jeżeli punkt $M(a, f(a))$ należy do obrazu geometrycznego funkcji ciągłej w punkcie a, to istnieje prostokąt o wysokości dowolnie małej (2ε), środkiem którego jest punkt M i wewnątrz którego znajdują się wszystkie punkty wykresu w otoczeniu punktu a. Czytelnik zechce narysować odpowiedni wykres.

71. Kryterjum konieczne i dostateczne ciągłości funkcji w punkcie a.

1) Kryterjum ciągłości prawostronnej w punkcie a.

Nazwijmy własnością (A) ciągłość prawostronną funkcji $f(x)$ w punkcie a.

Nazwijmy wartością (B) własność następującą, która

polega na tem, że do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę $\eta > 0$, że zawsze zachodzi nierówność

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

skoro tylko x' i x'' należą do przedziału $(a, a + \eta)$, (nie wyłączając punktu a z tego przedziału).

Otóż własność (A) pociąga własność (B), a własność (B) pociąga własność (A). Własność (B) jest więc kryterjum koniecznem i dostatecznem ciągłości prawostronnej funkcji $f(x)$ w punkcie a.

Inaczej: Jeżeli spełniona jest własność (A), to musi być spełniona własność (B); jeżeli spełniona jest własność (B), to musi być spełniona własność (A).

Zacznijmy od tego drugiego twierdzenia; niech $x' = a$, $x'' = x$, wtedy warunek (B) przyjmie postać

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \text{ dla } a \leqslant x < a + \eta$$

czyli $f(a + 0) = f(a)$, co jest równoznaczne z warunkami (A); warunek (B) jest więc dla ciągłości prawostronnej dostateczny. Warunek (B) jest także i konieczny. Jeżeli bowiem zachodzi własność (A), to $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ dla wszystkich wartości x' i x'', spełniających warunek

$$a < x' \leqslant x'' \leqslant a + \eta',$$

ponieważ istnieje granica $f(a + 0)$, (patrz l. 67, nierówność (10)). Z drugiej strony tej samej liczbie ε odpowiada liczba

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

o ile tylko x należy do przedziału $(a, a + \eta'')$, a to na mocy określenia granicy prawostronnej funkcji $f(x)$ w punkcie a, którą to granicą jest tutaj liczba $f(a)$ (własność A). Niech teraz η oznacza mniejszą z dwóch liczb η' i η''. Widzimy, że

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

dla wszystkich wartości x' i x'' przedziału $(a, a + \eta)$, nie wyłączając krańców.

2) Kryterjum ciągłości lewostronnej w punkcie a.

Własność (A) jest to ciągłość lewostronna funkcji $f(x)$ w punkcie a.

Własność (B): do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę $\eta > 0$, że zachodzi zawsze nierówność

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

skoro tylko x' i x'' należą do przedziału $(a - \eta, a)$.

Ta własność (B) jest kryterjum ciągłości lewostronnej.

Dowód jak poprzednio.

3) Kryterjum ciągłości (pełnej czyli obustronnej).

Własność (A) jest to ciągłość (pełna) funkcji w punkcie a.

Własność (B): do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę $\eta > 0$, że zachodzi zawsze nierówność

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

skoro tylko x' i x'' należą do przedziału $(a - \eta, a + \eta)$.

72. *Dalsze wnioski z pojęcia ciągłości funkcji. Przykłady funkcyj ciągłych.*

Jeżeli funkcja $f(x)$ *jest ciągła w punkcie* a, to funkcja $f(x)$ *jest też ograniczona w otoczeniu punktu* a.

Jeżeli funkcja $f(x)$ *jest ciągła w punkcie* a, to funkcja $|f(x)|$ *jest także ciągła w punkcie* a.

Jeżeli dwie funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ *są ciągłe* w punkcie a, to ich suma $f(x)$ i $\varphi(x)$ i ich iloczyn $f(x) . \varphi(x)$ są funkcjami *ciągłem* w punkcie a, iloraz zaś $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ jest także funkcją *ciąg ą* w punkcie a, o ile $\varphi(a) \neq 0$.

Twierdzenie o ciągłości sumy lub iloczynu dwóch funkcyj ciągłych stosuje się oczywiście i w tym przypadku gdy mamy do czynienia z dowolną, lecz skończoną liczbą funkcyj. Tak więc, ciągłość funkcyj $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ w punkcie a pociąga ciągłość sumy $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x$ i iloczynu $f_1(x) . f_2(x) \ldots f_n(x)$ tych funkcyj w tymże punkcie a.

Dowód tych twierdzeń jest zupełnie podobny do dowodu analogicznych twierdzeń, tyczących się własności granicy, podanych poprzednio, l. 67 i 68; dlatego uzasadnienie opuszczamy.

Zbadajmy pod względem ciągłości najprostsze funkcje, wymienione poprzednio (patrz l. 64).

Jeżeli $y=$ stałej C, dla każdej wartości zmiennej x, to odpowiednia funkcja jest oczywiście ciągła dla każdej wartości zmiennej x.

Jeżeli $y=x$, to odpowiednia funkcja jest oczywiście ciągła dla wszystkich wartości zmiennej x.

Twierdzenie o ciągłości sumy i iloczynie dwóch funkcyj ciągłych pozwala wysnuć wniosek, iż każdy jednomian ax^n, a więc i wielomian

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

jest funkcją ciągłą zmiennej x dla każdej wartości tej zmiennej.

Z tego samego powodu każda funkcja wymierna $y=R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ jest funkcją ciągłą zmiennej x dla każdej wartości tej zmiennej, z wyjątkiem jednakże tych, dla których wielomian-mianownik $Q(x)$ staje się równym zeru.

Zbadajmy funkcję wymierną $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ w otoczeniu takiej wartości a zmiennej x, która czyni zadość warunkowi $Q(a)=0$. Udowodnimy później, że w takim razie $Q(x)=(x-a)^p \cdot Q_1(x)$, przyczem $Q_1(a) \neq 0$; liczba p nazywa się rzędem wielokrotności pierwiastka a w równaniu $Q(x)=0$. Możemy założyć, że $P(a) \neq 0$; gdyby bowiem $P(x)=0$, to można byłoby zastosować taki sam rozkład na czynniki w liczniku i wspólny czynnik usunąć przez „skrócenie".

Tak więc

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{1}{(x-a)^p}\cdot\frac{P(x)}{Q_1(x)}, \text{ przyczem } P(a) \neq 0,\ Q_1(a) \neq 0.$$

jeżeli p jest liczbą parzystą, y dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$, zależnie od tego, czy liczba $\frac{P(a)}{Q_1(a)}$ jest dodatnia czy ujemna; w tym wypadku funkcja zachowuje się jednakowo z lewej i z prawej strony punktu a.

Jeżeli p jest liczbą nieparzystą, to funkcja zachowuje się inaczej z lewej a inaczej z prawej strony; mianowicie:

1) gdy $\frac{P(a)}{Q_1(a)} > 0$, to y dąży do $-\infty$ z lewej strony punktu a, dąży zaś do $+\infty$ z prawej strony;

2) gdy $\frac{P(a)}{Q_1(a)} < 0$, to y dąży do $+\infty$ lewostronnie, a do $-\infty$ prawostronnie.

Funkcje $\sin x$ i $\cos x$ są ciągłe dla każdej wartości x; w rzeczy samej

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$$

$$|\sin x - \sin a| \leqslant 2 \sin \frac{|x-a|}{2} \left| \cos \frac{x+a}{2} \right|, \text{ o ile}$$

$|x-a| < \pi$. Dalej $\left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leqslant 1$; $\sin \frac{|x-a|}{2} \leqslant \frac{|x-a|}{2}$; tak więc

$$|\sin x - \sin a| \leqslant |x-a|;$$

wystarczy więc narzucić zmiennej x warunek

$$|x-a| < \varepsilon,$$

by $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$, co jest wyrazem ciągłości (pełnej) funkcji sir ~ w punkcie a.

Tak samo: $\cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}$.

$$|\cos x - \cos a| = 2 \sin \frac{|x-a|}{2} \left| \sin \frac{x+a}{2} \right| \leqslant |x-a| < \varepsilon,$$

skąd taki sam wniosek, jak i dla funkcji $\sin x$.

Funkcja $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, jest na mocy twierdzenia o ilorazie funkcyj ciągłych, ciągłą dla każdej wartości zmiennej x, z wyjątkiem wartości $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ dla $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ W każdym z tych punktów nieciągłości funkcja $\operatorname{tg} x$ zmierza do $+\infty$ lewostronnie, do $-\infty$ prawostronnie.

Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ posiada następujące własności:
1) $f(x)$ jest funkcją określoną dla każdej wartości x.
2) $f(x)$ spełnia równanie funkcyjne

$$f(x+y) = f(x) . f(y)$$

3) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Funkcja $f(x)$ posiadająca takie własności jest dla każdej wartości zmiennej x różna od *zera* i *ciągła*.

Niech a oznacza dowolny punkt; gdyby $f(a) = 0$, to na zasadzie warunku (2): $f(x) = f(a) f(x-a) = 0$ dla każdego x. Lecz wtedy $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, co przeczy warunkowi (3). Następnie mamy też wedle (2) $f(x) - f(a) = f(x) . f(x-a) - f(a) = f(a) . [f(x-a) - 1]$. Z warunku (3) wynika, że do każdej liczby $\frac{2}{|f(a)|}$ można dobrać taką liczbę η, że $|f(x-a) - 1| < \frac{\varepsilon}{|f(a)|}$. Stąd wynika, że $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, skoro tylko $|x-a| < \eta$, co dowodzi ciągłości funkcji $f(x)$ w punkcie a. Stąd także wynika, że $f(0) = 1$.

Otóż istnieją funkcje, które, jak zobaczymy później (l. 77), spełniają wszystkie trzy wymienione warunki, mianowicie funkcja wykładnicza $y = a^x$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, różną od jedności.

A więc funkcja wykładnicza $y = a^x$ jest ciągła.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie a i jeżel ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ dąży do granicy a, to ciąg $f(x_1)$ $f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ jest zbieżny i zmierza do granicy $f(a)$. Jeżeli, w którymś z punktów $x_1, x_2, \ldots$ funkcja $f(x)$ nie jest określona, odpowiedni wyraz w ciągu drugim, oczywiście, usuwamy; jasna rzecz, że usuniętych wyrazów może być tylko liczba skończona, gdyż z ciągłości funkcji w punk-

cie a wynika, że funkcja $f(x)$ jest określona w pewnym dostatecznie małym przedziale, zawierającym punkt a jako punkt wewnętrzny.

Dowód jest bezpośredni:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = f(a).$$

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, t. j. jeżeli jakiś ciąg $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ jest zbieżny i zmierza do granicy równej wartości funkcji w punkcie a, gdzie a jest granicą ciągu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ (istnienie tej granicy zakładamy), to funkcja $f(x)$ nie koniecznie musi być ciągła w punkcie a.

Jako przykład może służyć funkcja $y = f(x)$ równa zeru w punkcie 0, i równa $y = \sin \frac{1}{x}$ dla wszystkich innych wartości zmiennej x; ciąg wartości zmiennej x niech będzie ciągiem $x_1 = \frac{1}{\pi}, x_2 = \frac{1}{2\pi}, x_3 = \frac{1}{3\pi}, \ldots, x_n = \frac{1}{n\pi}, \ldots$; funkcja nasza w tych punktach równa się zeru, gdyż $f(x_n) = \sin n\pi = 0$ dla każdej wartości wskaźnika n; mamy ciąg, którego każdy wyraz równa się 0; taki ciąg jest zbieżny; mamy więc tutaj $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$; lecz $\lim_{n \to 0} x_n = 0$, tak iż w tym przypadku $a = 0$; $f(a) = f(0) = 0$, czyli $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(0)$; pomimo to funkcja nasza, jak wiemy, nie jest ciągła (patrz l. 69), gdyż nie istnieje, ani $f(a+0)$, ani $f(a-0)$.

Rzecz ma się zupełnie inaczej, jeżeli założymy, że warunek $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = f(a)$, (gdzie $a = \lim_{n \to \infty} x_n$), ma miejsce nie dla pewnego określonego ciągu, ale że jest spełniony zawsze, dla każdego ciągu, byle tylko wartości zmiennej x, czyniły zadość warunkowi $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Jeżeli te założenia są spełnione, to funkcja jest ciągła w punkcie a. Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności. Przypuśćmy, że mimo

spełnienia warunków założenia, funkcja $f(x)$ nie jest ciągła w punkcie a; w takim razie $f(x)$ albo dąży do granicy różnej od $f(x)$, albo nie zmierza do żadnej granicy w punkcie a. Stąd wniosek, iż istnieje liczba $\delta > 0$, taka, że w dowolnie małym przedziale $(a - \eta, a + \eta)$ istnieją wartości zmiennej x, spełniające warunek

$$|f(x) - f(a)| \geqq \delta,$$

albowiem, w przeciwnym razie warunki kryterjum ciągłości byłyby spełnione. Niech x_1 oznacza taką wartość zmiennej x; ponieważ takie wartości znaleźć się muszą w dowolnie małym przedziale, otaczającym punkt a, więc można znaleźć ciąg punktów $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, zmierzający do granicy a, przyczem dla każdego n, $|f(x_n) - f(a)| \geqq \delta$; wystarczy w tym celu wybrać punkt x_n tak by spełniał odpowiedni warunek $|f(x_n) - f(a)| \geqq \delta$ i znajdował się w przedziale $(a - \eta_n, a + \eta_n)$, gdzie liczby η_n spełniają tylko warunek $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = 0$.

Zwróćmy uwagę na ciąg: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ Ciąg ten albo jest rozbieżny, albo posiada granicę g nierówną $f(a)$; gdyby bowiem było $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$, to zacząwszy od pewnego wskaźnika $n_0(\varepsilon)$, t. j. dla $n > n_0$,

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon,$$

przyczem n_0 może być dobrane do każdego $\varepsilon > 0$; wystarczy wziąć ε równe liczbie, którą oznaczyliśmy poprzednio przez δ, by zauważyć sprzeczność, gdyż zawsze

$$|f(x_n) - f(a)| > \delta.$$

Doszliśmy więc do takiego wniosku: z nieciągłości funkcji $f(x)$ w punkcie a wynika istnienie ciągu wartości zmiennej x, zmierzających do granicy a, takiego, że odpowiadające im wartości funkcji nie dążą do granicy $f(a)$.

A więc, jeżeli dla każdego takiego ciągu, odpowiadające im wartości funkcji dążą do granicy $f(a)$, to funkcja jest ciągła w punkcie a. Twierdzenie jest udowodnione.

Zbadajmy jeszcze ciągłość funkcji złożonej $y=f(x)$, gdzie $y=\varphi(u)$, $u=\psi(x)$, w punkcie $x=a$. Przypuśćmy, że funkcja $\psi(x)$ jest ciągła w punkcie a, funkcja zaś $\varphi(u)$ jest ciągła dla wartości $u=\psi(a)$; jeżeli te założenia są spełnione, to funkcja złożona $f(x)=\varphi\{\psi(x)\}$ jest ciągła w punkcie a.

W rzeczy samej, gdy $x \to a$, $u=\psi(x) \to \psi(a)$, czyli $\lim \psi(x)=\psi(a)=u_0$; gdy $u \to u_0$, $y=\varphi(u) \to \varphi(u_0)$;

$$\lim_{a \to x} f(x)=\lim_{x \to a} \varphi\{\psi(x)\}=\lim_{x \to a} \varphi(u)=\lim_{u \to u_0} \varphi(u)=\varphi(\lim_{u \to u_0} u)=$$
$$=\varphi(u_0)=\varphi\{\psi(a)\}=f(a).$$

Na tej zasadzie możemy twierdzić, np., że funkcja $y=P(\sin x)$, t. j. $y=P(z)$, $z=\sin x$, gdzie $P(z)$ oznacza dowolny wielomian, jest funkcją ciągłą zmiennej x dla każdej wartości x.

73. *Przykłady funkcyj nieciągłych.*

Funkcja $f(x)$ jest nieciągła w punkcie a, jeżeli którakolwiek z wartości $f(a-0)$, $f(a)$, $f(a+0)$ nie istnieje; dalej, funkcja jest nieciągła nawet wtedy, gdy wszystkie te trzy liczby istnieją, t. j. mają wartości oznaczone, ale nie są między sobą równe.

1) Najprostszy przypadek nieciągłości zachodzi wtedy, gdy obie granice $f(a+0)$ i $f(a-0)$ istnieją i są sobie równe, lecz różnią się od wartości funkcji w punkcie danym. Naprzykład, funkcja równa zeru dla $x=0$ i równa 1 dla każdej innej wartości zmiennej x; punktem nieciągłości jest tu punkt 0, gdyż $f(0)=0$, a granica lewostronna równa się granicy prawostronnej i równa się 1. Wykres nie może uwydatnić tej nieciągłości, gdyż wykresem jest tu prosta, równoległa do osi Ox w odległości równej $+1$ od tej osi, z tem zastrzeżeniem, że jeden punkt tej prostej, mianowicie punkt jej przecięcia się z osią Oy należy usunąć i zastąpić punktem początkowym O układu spółrzędnych.

Nieciągłość tego typu jest poniekąd zupełnie sztuczna,

wystarczy bowiem zmienić w określeniu tej funkcji jedną wartość, by uczynić ją ciągłą, mianowicie, wystarczy $f(a)$ uczynić równe wspólnej wartości $f(a+0)$ i $f(a-0)$.

Jako inny przykład tego samego rodzaju można wziąć funkcję $y=\frac{x}{x}$; dla wszystkich wartości $x \neq 0$, $y=1$; wyjątek stanowi wartość zmiennej $x=0$, dla której to wartości funkcja y nie jest oznaczona. A więc punkt $x=0$ jest punktem nieciągłości; lecz wystarczy dodatkowo dla $x=0$ wyznaczyć naszej funkcji wartość 1, by tę sztuczną nieciągłość usunąć.

2) Następnie, możemy mieć w punkcie a nieciągłość, polegającą na tem, że $f(a-0)$ i $f(a+0)$ choć istnieją, nie są sobie równe; nieciągłość tego typu jest już bardziej istotna, gdyż, zmieniając w określeniu wartości funkcji wartość w jednym punkcie, nie uczynimy jej ciągłą, albowiem nigdy nie może być w tym przypadku $f(a+0)=$ $=f(a)=f(a-0)$, jakąkolwiek wartość nadać funkcji w punkcie a.

Nieciągłość tego typu zachodzi, np., dla funkcji: $y=\frac{|x|}{x}$, gdy $x \neq 0$, prócz tego gdy $x=0$, $y=l$ (liczba dowolna), gdy $x<0$, $y=-1$, gdy $x>0$, $y=+1$. Tak więc $f(a+0)=+1$; $f(a-0)=-1$; $f(a)=l$; $a=0$. Wykres składa się z dwóch półprostych: z jednej, $y=-1$, z lewej strony osi rzędnych aż do przecięcia się z tą osią; z drugiej, $y=+1$, od tej osi na prawo, przyczem punkty tych dwóch półprostych, wspólne z osią Oy nie należą do wykresu, należy te punkty zastąpić punktem $x=0$, $y=l$. Jeżeli $f(a)=l=f(a+0)$, to zachodzi ciągłość prawostronna, jeżeli $f(a)=l=f(a-0)$, to zachodzi ciągłość lewostronna. Obustronnej ciągłości przy jednej wartości l nie osiągniemy.

Nieciągłości typu (1) i (2) należą do tak zwanych nieciągłości pierwszego rodzaju. Charakterystyczną cechą nieciągłości pierwszego rodzaju jest istnienie granic $f(a+0)$

i $f(a-0)$. Na osobną uwagę zasługuje przypadek, gdy $f(a+0) \neq f(a-0)$, lecz $f(a) = \frac{1}{2}\{f(a+0)+f(a-0)\}$.

Przykłady:

1) $y = E(x)$; punktami nieciągłości są tu punkty o współrzędnych x całkowitych, $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Przypominamy, że $E(x)$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Wykres tej funkcji ma kształt schodków. $E(n) = n$, $E(n+0) = n$, $E(n-0) = n-1$; tak więc w tym przypadku $a = n =$ liczbie całkowitej;

$$f(a+0) = f(a-0) \neq f(a-0);$$

funkcja $y = E(x)$ jest nieciągła, jednakże zachodzi ciągłość prawostronna. Czytelnik zbada nieciągłości funkcji

$$y = x - E(x);\quad y = E(x^2);\quad y = E\left(\frac{1}{x}\right);\quad y = \sin E(x).$$

2) $y = \operatorname{Arctg}\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$; $y = 0$, dla $x = 0$.

Tutaj $f(a-0) = -\frac{\pi}{2}$; $f(a+0) = \frac{\pi}{2}$; $f(a) = 0$; $a = 0$.

$$f(a-0) + f(a+0) = 2f(a).$$

Punkt $x = 0$ jest jedynym punktem nieciągłości.

3) Może się zdarzyć, że funkcja w punkcie a jest nieciągła, lecz funkcja $\frac{1}{f(x)}$ jest ciągła; jasna rzecz, że wtedy $\frac{1}{f(a)} = 0$, gdyby bowiem $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)}$ i będąc funkcją ciągłą w punkcie a, dążyło do granicy $g \neq 0$, to $f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ także wbrew założeniu, byłoby funkcją ciągłą w punkcie a. W tym więc przypadku $f(x)$ dąży do $+\infty$ albo do $-\infty$, albo też z jednej strony (lewostronnie lub prawostronnie) do $+\infty$, a z drugiej strony punktu a do $-\infty$.

Tak, np., funkcja

$$y=\frac{k}{x^2}$$

zmierza w punkcie $x=0$ do $+\infty$ albo do $-\infty$, zależnie od tego, czy stała $k>0$ czy też $k<0$. Funkcja zaś $y=\frac{k}{x}$ gdy $x\rightarrow 0$, zmierza do $+\infty$ lub do $-\infty$, zależnie od tego z której strony zbliżamy się do punktu 0; tak samo zachowuje się funkcja $y=\operatorname{tg} x$ w otoczeniu punktów nieciągłości $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

4) Wreszcie może się zdarzyć, że w punkcie a funkcja nie zmierza do żadnej granicy skończonej g, ani do $+\infty$, ani do $-\infty$; może to mieć miejsce albo tylko lewostronnie, albo tylko prawostronnie, albo też obustronnie. Dla przykładu wystarczy przytoczyć funkcje $y=\sin\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$, $y=\sin\lg x$, nieciągłe w punkcie $x=0$. Funkcja, równa $+1$ albo -1, zależnie od tego, czy zmienna x ma wartość wymierną czy też niewymierną, nie posiada granicy $f(a+0)$, ani granicy $f(a-0)$ w punkcie a, gdzie a może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada punkty nieciągłości w przedziale (m, n), gdzie jest określona, to należy wtedy pod uwagę wziąć nie tylko rodzaj nieciągłości w każdym punkcie a przedziału (m, n), gdzie zachodzi nieciągłość, ale także wziąć jako podstawę klasyfikacji naturę zbioru tych punktów nieciągłości. I tak naprzykład zbiór (E) punktów nieciągłości w (m, n) może składać się ze skończonej liczby punktów, albo też być zbiorem nieskończonym. Jeżeli E jest zbiorem nieskończonym, to możemy jeszcze rozróżnić szereg możliwych przypadków; zbiór pochodny zbioru (E) rzędu pierwszego, albo też któregoś z rzędów wyższych może się składać ze skończonej liczby punktów; zbiór (E) może być gęsty w sobie albo też nie; może być

wszędzie gęsty, albo też nie wszędzie gęsty. W szczegóły tych rozróżnień wchodzić tutaj nie będziemy.

74. *Własności funkcyj ciągłych.*

W tym miejscu omówimy niektóre, ważne w zastosowaniach, własności funkcyj ciągłych. Własności te jednak nie są własnościami, cechującemi wyłącznie funkcje ciągłe, czyli istnieją funkcje nieciągłe, posiadające je także.

1) Jeżeli funkcja jest ciągła w punkcie a i $f(a) \neq 0$, to w otoczeniu punktu a funkcja posiada ten sam znak, co liczba $f(a)$.

Innemi słowy, jeżeli, np. $f(a) > 0$, to istnieje przedział $(a - \eta, a + \eta)$ taki, że dla każdej wartości x w tym przedziale, $f(x) > 0$.

W rzeczy samej, z ciągłości wynika, że przedział $(a - \eta, a + \eta)$ może być dobrany do dowolnie małej liczby dodatniej ε tak, by w tym przedziale zachodziła nierówność

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon;$$

niech $\varepsilon = |f(a)|$, w takim razie $|f(x) - f(a)| < |f(a)$, czyli

$$f(a) - |f(a)| < f(x) < f(a) + |f(a)|;$$

jedna z dwóch liczb $f(a) - |f(a)|$, $f(a) + |f(a)|$ jest zerem, pierwsza albo druga, zależnie od tego, czy $f(a) > 0$, czy też $f(a) < 0$; w pierwszym przypadku w przedziale $(a - \eta, a + \eta)$ mamy

$$f(x) > 0;$$

w drugim mamy

$$f(x) < 0.$$

Jasna rzecz, że ta własność nie jest charakterystyczna dla funkcyj ciągłych w punkcie a, t. j. i funkcja nieciągła w punkcie a może być dodatnią w otoczeniu punktu a.

2) Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale (m, n), to jest ograniczona w tym przedziale.

Jak zwykle (m, n) oznacza, oczywiście, przedział skończony właściwy, czyli punkty m i n należą do przedziału;

w punkcie m zakładamy ciągłość prawostronną, w punkcie n lewostronną.

Funkcja ciągła w przedziale (m, n) jest ciągła w każdym punkcie a tego przedziału; jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie a, to w otoczeniu tego punktu jest ograniczoną, gdyż w otoczeniu punktu a spełnia warunek

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

Lecz, jeżeli funkcja jest ograniczona w otoczeniu każdego punktu a przedziału (m, n), to jest ograniczona w przedziale (m, n), jak to wynika z twierdzenia udowodnionego poprzednio (patrz l. 63).

Ta własność również nie jest charakterystyczna dla ciągłości; mogą być funkcje nieciągłe w (m, n), a jednak ograniczone w tym przedziale.

3) Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale (m, n), to osiąga swój kres górny K i swój kres dolny k, t. j. te liczby K i k należą do zbioru (Y) wartości, które przyjmuje funkcja $f(x)$ w przedziale (m, n); czyli inaczej jeszcze, istnieje liczba ξ, należąca do (m, n) i taka że $f(\xi) = K$; tak samo, istnieje w (m, n) liczba τ taka, że $f(\tau) = k$.

W rzeczy samej, z ciągłości funkcji w (m, n) wynika, że $f(x)$ jest ograniczona w tym przedziale; funkcja ograniczona w przedziale, posiada w tym przedziale kres górny i kres dolny (patrz l. 60). W takim razie istnieje w (m, n) taki punkt ξ, w otoczeniu którego funkcja posiada ten sam kres górny K, co i w (m, n); jest to wniosek, udowodniony w ustępie l. 63. Stąd wynika, że można znaleźć ciąg liczb $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, takich, że $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$ i takich, że

$$K - \varepsilon_n < f(x_n) \leq K, \tag{11}$$

przyczem $\lim \varepsilon_n = 0$; stąd wniosek $\lim f(x_n) = K$; lecz z ciągłości wynika, że $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n \to \infty} x_n) = f(\xi)$; a więc $f(\xi) = K$.

Należy jeszcze ściśle okazać, że można zadość uczynić warunkom poprzednio wymienionym. Wybieramy w tym celu dwa dowolne ciągi liczb dodatnich, mających granice zero, ciąg $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n \ldots$ i ciąg $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n \ldots$

W przedziale $(\xi - \eta_n, \xi + \eta_n)$ liczba K jest kresem górnym wartości funkcji $f(x)$, a więc w tym przedziale $(\xi - \eta_n, \xi + \eta_n)$ musi istnieć przynajmniej jeden punkt x_n, taki, że funkcja $f(x)$ spełnia w tym punkcie warunek (11). Jasne, że w tych warunkach $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = K$.

Przyjęliśmy, że $\xi \neq m$ i $\xi \neq n$; czytelnik sam wprowadzi drobną zmianę w dowodzie w wypadku, gdy $\xi = m$ lub $\xi = n$. Podobny dowód pozwala ustalić istnienie w (m, n) punktu τ, w którym funkcja przyjmuje wartość k, t. j. $f(\tau) = k$.

I ta własność także nie jest charakterystyczną dla funkcji ciągłej, t. j. istnieją funkcje, nieciągłe w przedziale (m, n), które osiągają swój kres górny czy kres dolny lub kres dolny i kres górny. Jeżeli jednak spotkamy funkcję, która w przedziale (m, n) nie osiąga swego kresu górnego, albo dolnego, to tem samem mamy dowód, że nasza funkcja jest nieciągła w (m, n).

Zbadajmy, np. funkcję $y = x - E(x)$; kresem górnym tej funkcji jest jeden, kresem dolnym zero, w każdym przedziale (m, n) zawierającym przynajmniej jedną liczbę całkowitą. Kres dolny k funkcja osiąga właśnie w punkcie o spółrzędnej x całkowitej, bo wtedy $x = E(x)$; kresu górnego $K = 1$ funkcja nasza nie osiąga. Mamy więc tu przykład funkcji nieciągłej, która osiąga kres dolny, ale nie osiąga swego kresu górnego.

Jeżeli funkcja osiąga kres górny, to ten kres górny jest zarazem maximum funkcji; jeżeli funkcja osiąga swój kres dolny, to ten kres dolny jest zarazem minimum funkcji.

4) Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale (m, n), to każda liczba przedziału (k, K) należy do zbioru (Y) wartości, które przyjmuje funkcja nasza w (m, n), (gdzie K i k są kresem górnym i dolnym wartości funkcji w przedziale). Albo inaczej, jeżeli b jest dowolną liczbą przedziału *właściwego* (k, K), to istnieje zawsze przynajmniej jedna liczba $x = x_b$, należąca do (m, n) i spełniająca warunek $f(x_b) = b$.

Udowodnijmy w tym celu twierdzenie następujące: jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w (m, n) i przybiera w tym przedziale wartości dodatnie i ujemne, to przybiera także i wartość zero; albo inaczej, jeżeli zbiór (Y) wartości, które przyjmuje funkcja w (m, n), zawiera choć jedną parę liczb posiadających znaki odmienne, to w tym zbiorze (Y) znajduje się z pewnością wartość zero.

Przypuśćmy więc, że $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$, gdzie x_1 i x_2 należą do (m, n); przypuśćmy ponad to, w celu ustalenia rzeczy, że np. $x_1 < x_2$.

Podzielmy wszystkie liczby przedziału (x_1, x_2) na dwie klasy. Do klasy I zaliczymy każdą liczbę rzeczywistą l, spełniającą ten warunek, że dla wszelkiej liczby x, zawartej w przedziale (x_1, l) t. j. spełniającej nierówność

$$x_1 \leqslant x \leqslant l,$$

mamy

$$f(x) \leqslant 0.$$

Do klasy II zaliczymy zaś wszystkie pozostałe liczby przedziału (x_1, x_2).

Łatwo sprawdzić, że ten podział jest istotnie przekrojem w dziedzinie liczb rzeczywistych przedziału (x_1, x_2); tak, np. x_1 należy do I, a x_2 do II klasy.

Przekrój ten określa pewną liczbę ξ, należącą do przedziału (x_1, x_2). Otóż w punkcie ξ funkcja nasza równa się zeru, czyli $f(\xi) = 0$. Dowód przez spowadzenie do sprzeczności. Przypuśćmy np., że $f(\xi) = b > 0$. Na zasadzie włas-

ności pierwszej tego ustępu, istnieje przedział $(\xi - \eta, \xi - \eta)$ taki, że dla każdego punktu tego przedziału funkcja ma wartość taką samą co do znaku, jak w punkcie ξ, t. j. dodatnią; funkcja $f(x)$ byłaby więc dodatnią w lewostronnem otoczeniu punktu ξ; lecz punkty w lewostronnem otoczeniu punktu ξ należą do klasy pierwszej i funkcja $f(x)$ musi być dla nich ujemną (patrz określenie liczb klasy pierwszej), stąd sprzeczność.

Podobnie niedorzecznem jest przypuszczenie, że

$$f(\xi) = c < 0,$$

a więc musi być

$$f(\xi) = 0,$$

co należało udowodnić.

Wniosek.

Niech $f(x_1) \neq f(x_2)$, gdzie x_1 i x_2 należą do (m, n). Istnieje w przedziale (x_1, x_2) punkt ξ, w którym funkcja przyjmuje wartość c wybraną dowolnie z pośród wartości pośrednich między liczbami $f(x_1)$ i $f(x_3)$. Przypuśćmy np., że $f(x_1) < f(x_2)$ i niech c oznacza dowolną liczbę, spełniającą warunek

$$f(x_1) < c < f(x_2);$$

w tych warunkach istnieje punkt ξ taki, że

$$f(\xi) = c.$$

Dla dowodu, utwórzmy funkcję

$$\varphi(x) = f(x) - c; \quad \varphi(x_1) = f(x_1) - c < 0; \quad \varphi(x_2) = f(x_2) - c > 0;$$

na mocy poprzedniego, istnieje więc dla funkcji ciągłej $\varphi(x)$ punkt pośredni ξ, spełniający równanie

$$\varphi(\xi) = 0;$$

lecz $\varphi(\xi) = f(\xi) - c$; więc $f(\xi) - c = 0$, czyli $f(\xi) = c$, co trzeba było udowodnić.

Niektórzy autorowie twierdzenie to wysławiają w sposób następujący: funkcja ciągła nie może przejść od jednej

wartości $f(x_1)$ do drugiej $f(x_2)$, nie przechodząc przez wszystkie wartości pośrednie.

W interpretacji geometrycznej udowodnione twierdzenie brzmi: jeżeli wykres funkcji ciągłej zawiera, między innemi, parę punktów, leżących po dwóch stronach przeciwległych prostej, równoległej do osi Ox, to wykres musi tę prostą przecinać, t. j. ma przynajmniej jeden punkt z nią wspólny.

Niech teraz x_1 i x_2 oznaczają właśnie te punkty, w których funkcja osiąga kres dolny i górny, t. j. wtedy

$$f(x_1)=k,\ f(x_2)=K;$$

takie wartości x_1 i x_2 istnieją, na mocy udowodnionej poprzednio w tym ustępie własności trzeciej.

Niech b oznacza dowolną liczbę, spełniającą nierówność

$$k<b<K;$$

na zasadzie tylko co udowodnionego twierdzenia, istnieje wartość x_b, należąca do (x_1, x_2) i spełniająca nierówność

$$f(x_b)=b;$$

co należało udowodnić. A więc funkcja przyjmuje przynajmniej raz każdą wartość, zawartą między swoim kresem dolnym i górnym.

I ta własność także nie jest charakterystyczna dla funkcyj ciągłych. Przykład: funkcja $y=\sin\frac{1}{x}$ w przedziale (m, n) zawierającym początek spółrzędnych. Funkcja ta nie jest ciągła w $(m.n)$, lecz także nie może przejść od jednej wartości do drugiej, nie przechodząc przez wszystkie pośrednie.

W rzeczy samej: $-1\leqslant f(x_1)\leqslant+1$, $-1\leqslant f(x_2)\leqslant+1$; jeżeli $x_1<0$, $x_2>0$, to przy przejściu od x_1 do x_2 funkcja $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ wykonywa nieskończoną liczbę ciągłych wa-

hań od -1 do $+1$, a więc musi przejść (nawet nieskończenie wiele razy) przez wszystkie wartości pośrednie między $f(x_1)$ i $f(x_2)$.

Zauważmy jeszcze, że funkcja, ciągła w otoczeniu punktu a, może jednak posiadać w otoczeniu punktu a punkty nieciągłości. Dla przykładu wystarczy przytoczyć funkcję, określoną w sposób następujący: gdy $x =$ liczbie niewymiernej, $f(x) = 0$; gdy $x =$ liczbie wymiernej $\frac{p}{q}$, gdzie ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny, to $f(x) = \frac{1}{q} > 0$. Funkcja ta jest, oczywiście, nieciągłą w każdym punkcie wymiernym, t. j. dla każdej wartości wymiernej zmiennej x. Funkcja ta jest natomiast ciągłą, dla każdej wartości niewymiernej zmiennej x; w rzeczy samej, niech α oznacza liczbę niewymierną, a ε liczbę dodatnią dowolnie małą; każdej liczbie ε odpowiada liczba całkowita $q_0 > 0$, taka że $\frac{1}{q_0} < \varepsilon$; niech (Q_0) oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych $\frac{p}{q}$, w których mianownik $q \leqslant q_0$; w przedziale $(\alpha - 1, \alpha + 1)$ takich punktów może być tylko liczba skończona (najwyżej $2q_0^2$); niech w_0 oznacza tę z pośród liczb zbioru Q_0 zawartych w $(\alpha - 1, \alpha + 1)$, która jest najbliższa punktu α i niech $|\alpha - w_0| > \eta > 0$. W przedziale $(\alpha - \eta, \alpha + \eta)$ funkcja $f(x)$ spełnia warunek $|f(x)| < \varepsilon$, co dowodzi ciągłości w punkcie α, gdyż $f(\alpha) = 0$. Lecz dowolnie blizko tego punktu α są punkty wymierne, dla których funkcja nie jest ciągła.

75. *Ciągłość jednostajna.*

Założenie: funkcja jest ciągła w przedziale (m, n).

Wniosek: do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę δ, że w każdym przedziale, nie dłuższym od δ i zawartym w (m, n), oscylacja funkcji jest mniejsza od ε.

W tym celu wystarczy udowodnić, że nierówność

$|x-x'|<\delta$, pociąga za sobą $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$, o ile oprócz tego x i x' należą do (m, n).

Własność wyrażona we wniosku nazywa się jednostajną ciągłością. Twierdzenie nasze można więc wysłowić tak: funkcja, ciągła w przedziale (m, n) jest w tym przedziale jednostajnie ciągła.

Udowodnijmy najprzód, że przedział (m, n) można rozłożyć na skończoną liczbę przedziałów częściowych, takich, że w każdym oscylacja funkcji, czyli różnica między największą i najmniejszą wartością funkcji, jest mniejsza od ε. Nie będzie to jeszcze twierdzenie o jednostajnej ciągłości, ale cel będzie już blizki.

Zauważmy, że oscylacją w przedziale nazywamy różnicę między kresem górnym i kresem dolnym wartości funkcji w tym przedziale; ale tutaj możemy określić oscylację w przedziale, jako różnicę między największą i najmniejszą wartością, ponieważ funkcja ciągła osiąga swój kres górny i dolny, tak iż kres górny jest największą, a kres dolny najmniejszą wartością funkcji w przedziale.

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności metodą dzielenia kolejnego przedziałów na połowę. Przypuśćmy, iż nie można podzielić przedziału (m, n) na skończoną liczbę przedziałów częściowych o oscylacji mniejszej od ε. Podzielmy przedział (m, n) na dwa, punktem $\frac{1}{2}(m+n)$ i zbadajmy każdy z dwóch otrzymanych przedziałów; przynajmniej jeden z nich musi posiadać tę własność, którą przypisaliśmy przedziałowi (m, n), bo gdyby oba przedziały częściowe można było podzielić na skończoną liczbę części o oscylacji mniejszej od ε, wtedy to samo miałoby miejsce dla (m, n), wbrew naszemu przypuszczeniu. Niech więc (m_1, n_1) oznacza przedział, dwa razy mniejszy od przedziału (m, n) i nie dający się rozłożyć na skończoną liczbę przedziałów o oscylacji mniejszej od ε. Postąpmy z przedzia-

łem (m_1, n_1) tak, jak z przedziałem (m, n); otrzymamy przedział (m_2, n_2), cztery razy mniejszy od przedziału (m, n) i posiadający tę samą własność. Otrzymamy następnie przedziały (m_3, n_3), (m_4, n_4),... $(m_p\, n_p)$... i t. d. Jasna rzecz, że

$$(12) \qquad 0 < n_p - m_p < \frac{1}{2^p}(n - m)$$

i że oba ciągi $m_1, m_2, m_3, m_p, \ldots$ i

$n_1, n_2, n_3, n_p, \ldots$

są monotoniczne: pierwszy ciąg nigdy nie maleje, drugi nigdy nie rośnie; oba ciągi są ograniczone, jako zawarte w przedziale skończonym (m, n). Stąd granice

$$\lim_{p \to \infty} m_p = \mu \quad \text{i} \quad \lim_{p \to \infty} n_p = \nu$$

istnieją, przyczem z (12) wynika $\lim_{p \to \infty} (n_p - m_p) = 0$, czyli $\mu = \nu$. Punkt μ, wspólna granica obu ciągów, znajduje się wewnątrz każdego z przedziałów (m_p, n_p) dla $p = 1, 2, 3, \ldots$ Ponieważ na mocy założenia, $f(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie μ, więc w otoczeniu tego punktu wartości funkcji $f(x)$ różnią się od $f(\mu)$ mniej niż o $\frac{1}{2}\varepsilon$, a więc różnica dwóch dowolnych wartości funkcji w tym otoczeniu jest mniejsza od ε.

Wzmiankowanem otoczeniem jest pewien przedział, dostatecznie mały, otaczający punkt μ. Ponieważ

$$m_p < \mu < n_p$$

i na mocy (12) różnica $n_p - m_p$ przy odpowiedniem p może być tak małą, jak się podoba, można liczbę p wybrać dostatecznie wielką, tak by przedział (m_p, n_p) należał do wzmiankowanego otoczenia. Otóż tu wychodzi na jaw sprzeczność, gdyż z jednej strony przedział (m_p, n_p) nie może być rozłożony na przedziały częściowe w skończonej liczbie o oscylacji mniejszej od ε, a z drugiej strony oscylacja funkcji w całym przedziale (m_p, n_p) jest mniejsza od ε.

Twierdzenie o możliwości podziału (m, n) na przedziały częściowe o oscylacji mniejszej od dowolnie małej liczby zostało więc udowodnione.

Stąd już łatwo przejść do twierdzenia o jednostajnej ciągłości.

Podzielmy więc (m, n) na przedziały częściowe (P) w liczbie skończonej o oscylacji mniejszej od $\frac{1}{2}\varepsilon$. Z pośród tych przedziałów wybierzmy najmniejszy i niech δ oznacza jego długość. Niech teraz

$$|x - x'| < \delta;$$

punkty x i x' leżą albo wewnątrz tego samego przedziału częściowego (P), albo należą do dwóch sąsiednich; innych ewentualności niema. Stąd wynika, iż zawsze można znaleźć punkt x'' taki, że para punktów x i x'' z jednej strony, para punktów x' i x'' z drugiej, należą odpowiednio do wspólnego przedziału (P), A więc

$$|f(x) - f(x'')| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$
$$|f(x'') - f(x')| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Ponieważ

$$f(x) - f(x') = \{f(x) - f(x'')\} + \{f(x'') - f(x')\},$$

więc

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon,$$

ponieważ wartość bezwzględna sumy nie może być większa od sumy wartości bezwzględnych składników. Tak więc

$$|x - x'| < \delta,$$

pociąga za sobą

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Twierdzenie o jednostajnej ciągłości jest tedy udowodnione.

76. Jeżeli znamy wartości funkcji ciągłej $f(x)$, dla wszystkich wartości zmiennej x pewnego zbioru (X) i jeżeli punkt skupienia α zbioru (X) nie należy do (X), to możemy z łatwością wyznaczyć wartość funkcji $f(x)$ w punkcie

skupienia α. Ponieważ znamy wartości $f(x)$ tylko dla wartości zmiennej x należących do zbioru (X), a α do (X) nie należy, więc znalezienie wartości $f(\alpha)$ stanowi zagadnienie, zresztą bardzo łatwe do rozwiązania. Ze zbioru (X) wybierzmy ciąg $x_1, x_2, x_3, x_n, \ldots$ którego granicą jest punkt skupienia α, co, jak wiemy, (patrz l. 45) jest zawsze możliwe. Z kryterjum ciągłości wynika, że kryterjum zbieżności ciągu $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ jest spełnione. Wtedy mamy

$$f(\alpha) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

co określa nam $f(\alpha)$ jako granicę ciągu, utworzonego z wartości znanych funkcji $f(x)$.

Metodę wskazaną można z pożytkiem stosować w celu rozszerzenia funkcji, np. takiej, która została początkowo określona tylko dla wartości wymiernych zmiennej niezależnej. Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ jest określona tylko dla wartości wymiernych zmiennej x i że pozatem posiada tę własność, iż do każdej liczby dodatniej ε i do każdej liczby x można dobrać taki przedział, będący otoczeniem punktu x, że różnica dwóch wartości funkcji w dwóch dowolnych punktach wymiernych* tego przedziału jest, co do wartości bezwzględnej, mniejsza od ε. Wtedy możemy z łatwością rozszerzyć określenie naszej funkcji i dla wartości niewymiernych zmiennej i w ten sposób otrzymana funkcja będzie funkcją ciągłą zmiennej rzeczywistej x w całym przedziale, gdzie warunki założenia są spełnione.

Niech α będzie dowolną liczbą niewymierną, w otoczeniu której $f(x)$ jest określona dla wartości wymiernych zmiennej. Niech $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ oznacza dowolny ciąg liczb wymiernych, zmierzających do granicy α; funkcję $f(x)$ w punkcie α określimy jako równą $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$; granica powyższa istnieje, gdyż dla $n > n_0$ i $m > n_0$

* Punktem wymiernym nazywamy punkt, którego odcięta x wyraża się liczbą wymierną.

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

co wynika z założenia (tyczącego się $f(x)$; o ile liczbę n, dobierzemy tak, by x_n i x_m należały do owego przedziału, będącego otoczeniem punktu α, dla którego różnica dwóch dowolnych wartości funkcji $f(x)$ jest co do wartości bezwzględnej mniejsza od ε.

Lecz warunek (13) wyraża właśnie kryterjum zbieżności odnośnego ciągu. Tak więc $f(a) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$ istnieje.

Rozszerzenie zostało więc uskutecznione. Należy okazać, że w ten sposób rozszerzona funkcja nie przestała być ciągłą. W tym celu okażmy, że do każdej liczby dodatniej ε i do każdego punktu x można dobrać taki przedział $(x - \eta, x + \eta)$, że skoro tylko liczby rzeczywiste x' i x'' należą do tego przedziału, to zachodzi nierówność

(14) $$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Zauważymy, że o ile x' i x'' są liczbami wymiernemi, to powyższa własność jest spełniona na mocy założenia. Trzeba więc od tego przypadku przejść do przypadku, gdy jedna, a następnie obie liczby x' i x'' są niewymierne. Przypuśćmy najpierw, że $x'' = w$, gdzie w liczba wymierna, a $x' = \alpha$, przytem α niewymierne. Udowodnimy, że o ile α i w należą do otoczenia punktu x, to (14) jest spełnione. Wyznaczmy najpierw takie otoczenie $(x + \delta, x + \delta)$, by różnica dwóch wartości funkcji w punktach wymiernych tego otoczenia była mniejsza co do wartości bezwzględnej od $\frac{1}{2}\varepsilon$. Niech α należy do $(x - \delta, x + \delta)$ i niech ciąg $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ liczb wymiernych zmierza do granicy α; można wyznaczyć taki wskaźnik n, by w_n należało także do $(x - \delta, x + \delta)$ i by $f(w_n)$ różniło się od swojej granicy $f(\alpha)$ o mniej niż $\frac{1}{2}\varepsilon$; wtedy spełnione są jednocześnie dwie nierówności

$$|f(w_n) - f(w)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ i}$$

$$|f(\alpha) - f(w_n)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \text{ skąd wynika}$$

$$|f(\alpha) - f(w)| < \varepsilon,$$

czyli przynależność liczb α i w do $(x-\delta, x+\delta)$ pociąga (14) dla $x'=\alpha$ i dla $x''=w$.

Przejdźmy teraz do przypadku, gdy obie liczby x' i x'' są niewymierne, np. $x'=\alpha'$, $x=\alpha''$. W tym celu wyznaczmy taki przedział $(x-\eta, x+\eta)$, by $|f(\alpha)-f(w)|<\frac{1}{2}\varepsilon$, o ile liczba niewymierna α i liczba wymierna w należą do $(x-\eta, x+\eta)$, na zasadzie poprzednio rozpatrywanego przypadku jest to możliwe.

Niech $x'=\alpha'$ i $x''=\alpha''$ należą do tego przedziału $(x-\eta, x+\eta)$, i niech w oznacza dowolną liczbę wymierną, należącą do tegoż przedziału. Wtedy

$$|f(\alpha')-f(w)|<\tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ i}$$
$$|f(\alpha'')-f(w)|<\tfrac{1}{2}\varepsilon, \text{ skąd wynika}$$
$$|f(\alpha')-f(\alpha'')|<\varepsilon;$$

a więc przynależność liczb α' i α'' do przedziału $(x-\eta, x=\eta)$ pociąga (14) dla $x'=\alpha'$, $x''=\alpha''$. Tak więc nierówność (14) jest spełniona dla każdej pary wartości x' i x'', należących do odpowiednio dobranego otoczenia punktu x, mianowicie do przedziału $(x-\eta, x+\eta)$. Na mocy kryterjum zbieżności (patrz l. 71) funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x.

Do tego samego wyniku można byłoby dojść z łatwością w przypadku, gdy funkcja $f(x)$ jest określona, nie dla wartości wymiernych jakiegoś przedziału (m, n), lecz dla jakichkolwiek innych wartości zmiennej x pod jedynym warunkiem, że zbiór (Z) tych wartości x jest wszędzie gęsty (patrz l. 39) w (m, n). Oczywiście, założenie, że do każdej liczby x przedziału (m, n) może być dobrany przedział $(x-\eta, x+\eta)$ taki, że różnica wartości funkcji dla dwóch wartości zmiennej x, należących do zbioru (Z) i do przedziału $(x-\eta, x+\eta)$ jest, co do wartości bezwzględnej, zawsze mniejsza od ε, musi być spełnione. Niech α oznacza dowolny punkt przedziału (m, n) który nie należy do (Z);

ponieważ (Z) jest zbiorem wszędzie gęstym w przedziale (m, n), więc każdy punkt α przedziału (m, n) należy do zbioru (Z') t, j. do zbioru pochodnego (patrz l. 39, adnotacja). Punkt α jest więc punktem skupienia zbioru (Z); można zatem (patrz l. 45) znaleźć ciąg, utworzony z punktów zbioru (Z), dajmy na to $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$, taki, że $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \alpha$. Wartość funkcji $f(x)$ w punkcie α wyznaczamy przy pomocy warunku $f(\alpha) = \lim\limits_{n \to \infty} f(z_n)$. Czytelnik sprawdzi, że zadanie zostało w ten sposób zupełnie rozwiązane i, że określona w ten sposób w (m, n) funkcja $f(x)$ jest ciągła. Dowód nie różni się zasadniczo od poprzedniego.

77. Funkcja wykładnicza $y = a^x$.

W ustępie l. 12 udowodniliśmy istnienie rozwiązania czyli pierwiastka równania $x^n = a$, gdzie $a > 0$, a n jest liczbą całkowitą dodatnią, przy pomocy przekroju. Możemy ten sam wynik osiągnąć w inny sposób przy pomocy rozumowania, opartego na ciągłości funkcji; w tym celu weźmy pod uwagę $f(x) = x^n - a$; funkcja ta jest ciągła dla każdej wartości zmiennej x, przyczem $f(0) < 0$, $f(1 + a) > 0$; liczba zero jest więc pośrednią między $f(0)$ i $f(1 + a)$; ponieważ funkcja ciągła w $(0, 1 + a)$ przyjmuje w tym przedziale każdą wartość pośrednią, więc istnieje taka liczba $c > 0$, że $f(c) = 0$, t. j. $c^n = a$. Dwóch liczb, spełniających powyższy warunek nie znajdziemy, gdyż $c_1 > c > 0$ pociąga $c_1^n > c^n$.

Liczbę $c > 0$, określoną jednoznacznie w powyższy sposób, nazywać będziemy pierwiastkiem n^{tego} stopnia z liczby dodatniej a i oznaczymy symbolem $\sqrt[n]{a}$ lub $a^{\frac{1}{n}}$. Jeżeli $a = 1$, to $\sqrt[n]{a} = 1$; jeżeli $0 < a < 1$, $n > 1$, to $f(a) = a^n - a = a(a^{n-1} - 1) < 0$, $f(1) = 1 - a > 0$, więc $\sqrt[n]{a}$ zawarty jest w $(a, 1)$; jeżeli $a > 1$, to $f(1) = 1 - a < 0$, $f(a) = a^n - a > 0$ i $\sqrt[n]{a}$ zawarty jest w $(1, a)$.

Funkcję $y = a^x$ określamy dla wartości wymiernych zmiennej w następujący sposób; niech $x = \frac{p}{q}$, gdzie p i q są to dwie liczby całkowite dodatnie; wtedy $a^x = \sqrt[p]{a^p}$. Gdy x jest liczbą wymierną ujemną, to określenie a^x sprowadzamy do poprzedniego przypadku zapomocą wzoru $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$. Gdy $x = 0$, to zakładamy $a^0 = 1$. W ten sposób funkcja a^x została określona dla każdej wartości wykładnika x, o ile x jest liczbą wymierną. Łatwo sprawdzić, że tak określona funkcja spełnia w zakresie liczb wymiernych równania funkcyjne

1) $a^x . a^y = a^{x+y}$, t. j. $f(x).f(y) = f(x+y)$;
2) $(a^x)^y = a^{xy}$;
3) $a^x . b^x = (a.b)^x$, o ile także $b > 0$.

Z własności trzeciej wynika, że dla $b = \frac{1}{a}$, $b^x = \frac{1}{a^x}$.

O ile $a > 1$, to $b < 1$, więc wartość funkcji a^x w przypadku, gdy $a < 1$, równa się jedności podzielonej przez wartość funkcji wykładniczej $\left(\frac{1}{a}\right)^x$, gdzie $\frac{1}{a}$ jest już większe od jedności. Gdy $a = 1$, a^x równa się jedności. Wystarczy więc ograniczyć się do przypadku, gdy $a > 1$.

Z określenia funkcji a^x w zakresie liczb wymiernych, wynika, że a^x jest zawsze większe od 0, t. j. liczbą dodatnią; dalej, gdy $a > 1$, $a^{\frac{1}{q}}$ jest także, jak widzieliśmy, liczbą większą od jedności (przy $q > 0$); a więc $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ jest także liczbą większą od jedności. Krótko mówiąc a^x posiada w zakresie wartości wymiernych zmiennej wartość liczbową większą od jedności dla $x > 0$, a więc wartość mniejszą od jedności dla $x < 0$, $(a > 1)$.

Stąd znów wniosek następujący: jeżeli liczba wymierna

x_1 jest większa od liczby wymiernej x_2, to $a^{x_1} > a^{x_2}$; w rzeczy samej, na mocy własności pierwszej $a^{x_1} = a^{x_2} . a^{x_1 - x_2}$, $x_1 - x_2$ jest liczbą wymierną dodatnią, więc $a^{x_1 - x_2} > 1$, $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Udowodnimy teraz, że jeżeli ciąg liczb wymiernych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ zmierza do granicy zero, t. j. jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, to $\lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} = 1$.

Przypuśćmy najpierw, że $x_n = \frac{1}{n}$ i połóżmy $a^{x_n} = 1 + \delta_n$, gdzie $\delta_n > 0$, gdyż $a > 1$ i $x_n > 0$; stąd $(1 + \delta_n)^n = a$: lecz $(1 + \delta_n)^n > 1 + n\delta_n$, (patrz l. 29); z otrzymanej nierówności $1 + n\delta_n < a$ wynika $\delta_n < \frac{a-1}{n}$ i $0 < a^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta_n < 1 + \frac{a-1}{n}$

Stąd wynika $\left| a^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \frac{a-1}{n}$ i $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = a^{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}} = 1$

Wróćmy teraz do ciągu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p, \ldots$

Ponieważ $\lim x_p = 0$, więc istnieje taki wskaźnik p_o, iż $p > p_o$ pociąga $|x_p| < \frac{1}{n}$, a więc $a^{-\frac{1}{n}} < a^{x_p} < a^{\frac{1}{n}}$, czyli $|a^{x_p} - 1| < h$, gdzie $h = 1 - a^{-\frac{1}{n}}$; gdy $n \to \infty$, $h \to 0$, a więc $a^{x_p} \to 1$; czyli $\lim x_n \to 0$ pociąga $\lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} = 1$ w zakresie, oczywiście, wartości wymiernych zmiennej.

Jesteśmy teraz w możności rozszerzyć określenie funkcji $f(x) = a^x$ dla każdej wartości rzeczywistej zmiennej x. Wystarczy zastosować ogólną zasadę, wyłożoną w ustępie poprzednim. Musimy tylko wprzód sprawdzić, czy odpowiednie założenie, z którego wynikała ciągłość funkcji rozszerzonej jest tu spełnione. Chodzi o to, czy w otoczeniu każdego punktu x można wyznaczyć taki przedział $(x - \eta, x + \eta)$, by różnica dwóch wartości funkcji była mniejsza co do wartości bezwzględnej od dowolnie małej liczby do-

datniej ε. Łatwo sprawdzić, że ten warunek jest tutaj spełniony. Niech x należy do przedziału $|x|<m-1$, gdzie m jest dowolnie wielką liczbą dodatnią i niech, np., $x''>x'$: mamy $a^{x''}-a^{x'}=(a^{x''-x'}).a^{x'}$. Połóżmy $a^m=M$.

Niech $\delta>0$ oznacza liczbę dostatecznie małą, by $a^{2\delta}-1<\frac{\varepsilon}{M}$, gdzie ε jest liczbą dodatnią dowolnie małą.

Jeżeli x' i x'' należą do przedziału $(x-\delta, x+\delta)$ i jeżeli $\delta<1$, to $|x|+\delta<m$, i $0<x''-x'<2\delta$, $a^{x'}<a^{|x|+\delta}<M$,

$$0<a^{x''-x'}-1=a^{|x''-x'|}-1\leqslant a^{2\delta}-1<\frac{\varepsilon}{M}$$

$$0<a^{x''}-a^{x'}=a^{x'}(a^{x''-x'}-1)<M.\frac{\varepsilon}{M},$$

t. j. do każdej liczby x i do każdej liczby $\varepsilon>0$ można dobrać taki przedział $(x-\delta, x+\delta)$, że skoro tylko x' i x'' są dwiema dowolnemi liczbami, należącemi do przedziału $(x-\delta, x+\delta)$, to

$$|a^{x''}-a^{x'}|<\varepsilon$$

Warunek, od którego zależała możliwość rozszerzenia zakresu istnienia funkcji bez naruszenia ciągłości, jest więc spełniony.

Tak więc możemy uważać teraz funkcję a^x za określoną dla wszystkich wartości zmiennej rzeczywistej; funkcja ta nazywa się *funkcją wykładniczą*.

Sprawdźmy, że własności, które były spełnione przez funkcję wykładniczą w zakresie wartości wymiernych zmiennej, są spełnione i w rozszerzonym zakresie.

Niech x oznacza dowolną liczbę niewymierną, $x_1>x_2>x_3>\ldots>x_n\ldots$ ciąg malejący liczb wymiernych o granicy równej x; tak samo niech $y_1<y_2<y_3<\ldots<y_n<\ldots$ oznacza ciąg rosnący liczb wymiernych o granicy równej także x. Ciąg $a^{x_1}>a^{x_2}>a^{x_3}>\ldots$ jest malejący, a ciąg $a^{y_1}<a^{y_2}<a^{y_3}<\ldots$ jest rosnący i granicą wspólną obu ciągów jest a^x, a więc $a^{x_n}>a^x>a^{y_n}$.

Stąd wnioski następujące:

1) $a^x > 0$, gdyż $a^{y_n} > 0$;

2) jeżeli $x > 0$, to $a^x > 1$, gdyż można zawsze wybrać n dostatecznie wielkie, by $x > y_n > 0$, co znowu pociąga $a^{y_n} > 1$;

3) tak samo, jeżeli $x < 0$, to $a^x < a^{x_n} < 1$;

4) jeżeli $w_1 < x < w_2$, gdzie w_1 i w_2 są liczbami wymiernemi, to $a^{w_1} < a^x < a^{w_2}$; w rzeczy samej możemy zawsze utożsamić w_2 z którymś wyrazem x_k ciągu malejącego o granicy x, a w_1 możemy wziąć jako wyraz y_l odpowiedniego ciągu rosnącego o granicy x.

5) Jakkolwiek małą jest liczba $\varepsilon > 0$, można dobrać taką liczbę $\eta > 0$, że $|x| < \eta$, pociąga $|1 - a^x| < \varepsilon$; wystarczy udowodnić tę własność tylko dla wartości niewymiernych zmiennej x, gdyż dla wartości wymiernych, jak wiemy, jest spełniona. Niech w oznacza liczbę wymierną, dostatecznie małą dodatnią, by $1 - \varepsilon < a^{-w} < a^w < 1 + \varepsilon$, o ile $|x| < w$, czyli $-w < x < w$, to $a^{-w} < a^x < a^w$ na mocy własności (4); wystarczy więc wziąć $\eta = w$.

Udowodniliśmy więc twierdzenie: jeżeli x dąży do zera, to a^x dąży do jedności, czyli $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$ dla funkcji wykładniczej w rozszerzonym zakresie.

Sprawdźmy, że funkcja wykładnicza spełnia wszystkie trzy zasadnicze równości:
$a^x . a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $a^x . b^x = (a.b)^x$ i dla wartości niewymiernych. Niech x i y oznaczają liczby niewymierne i niech $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, gdzie x_n i y_n oznaczają liczby wymierne. Jak wiemy

(15) $$a^{x_n} . a^{y_n} = a^{x_n + y_n}; \quad a^{x_n} . b^{x_n} = (ab)^{x_n}.$$

Lecz $\lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} = a^x$; $\lim\limits_{n \to \infty} a^{y_n} = a^y$; $\lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n + y_n} = a^{\lim (x_n + y_n)} =$ $= a^{x+y}$; $\lim (ab)^{x_n} = (ab)^x$. Przechodząc w (15) obustronnie do granicy, otrzymamy $a^x . a^y = a^{x+y}$; $a^x . b^x = (ab)^x$.

Stąd wyprowadzamy ten sam wniosek, co poprzednio. Mianowicie, jeżeli $x_1 < x_2$, to $a^{x_1} < a^{x_2}$; jeżeli $a > b$ i $x > 0$, to $a^x > b^x$; jeżeli $a > b$ i $x < 0$, to $a^x < b^x$, i t. d.; wystarczy zauważyć, że $a = b.d$, $d > 1$; $a^x = (b.d)^x = b^x.d^x$; lecz $d^x > 1$ dla $x > 0$, $d^x < 1$ dla $x < 0$.

By otrzymać $(a^x)^y = a^{xy}$, zauważymy, że $a^{x_n y_n} = (a^{x_n})^{y_n} = (a^{x+\delta_n})^{y_n} = (a^x . a^{\delta_n})^{y_n} = (a^x)^{y_n}.(a^{\delta_n})^{y_n}$, gdzie $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$ $\lim\limits_{n \to \infty} (a^x)^{y_n} = \lim\limits_{n \to \infty} b^{y_n} = b^y = (a^x)^y$; niech u_n i w_n oznaczają dwie liczby wymierne, spełniające warunki $u_n < \delta_n < w_n$ i takie, że $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = 0$; wtedy $(^{\delta_n})^{y_n}$ jest liczbą, zawartą między $(a^{u_n})^{y_n}$ i $(a^{w_n})^{y_n}$, czyli między $a^{u_n y_n}$ i $a^{w_n y_n}$; gdy n rośnie nieograniczenie $a^{u_n y_n} \to 1$ i $a^{w_n y_n} \to 1$, stąd wniosek, że i $(a^{\delta_n})^{y_n} \to 1$.

Znaleźliśmy poprzednio $a^{x_n \cdot y_n} = (a^x)^{y_n}.(a^{\delta_n})^{y_n}$; przechodząc do granicy, otrzymamy $a^{x \cdot y} = (a^x)^y.1 = (a^x)^y$.

78. *Funkcja ciągła rosnąca i funkcja względem niej odwrotna.*

Przypuśćmy, że funkcja $y = f(x)$ jest określona w przedziale (m, n) i że jest funkcją rosnącą w tym przedziale, t. j. przypuszczamy, że $m \leqslant x_1 < x_2 \leqslant n$, pociąga zawsze $y_1 < y_2$, gdzie $y_1 = f(x_1)$, a $y_2 = f(x_2)$. Zamiast w przedziale (m, n) moglibyśmy również przyjąć, iż funkcja $f(x) = y$ jest wyznaczona dla wartości x, należących do pewnego zbioru ograniczonego (X). Oznaczmy, jak zwykle, przez (Y) zbiór odpowiadających wartości zmiennej y. Każdej wartości x zbioru (X), odpowiada jedna tylko wartość zbioru (Y). Jeżeli każdym dwom wartościom zmiennej x zbioru (X), związanym nierównością $x_1 < x_2$, odpowiada para wartości zmiennej y zbioru (Y), związanych zawsze nierównością $y_1 < y_2$, to odpowiedniość między obu zbiorami (X) i (Y) jest doskonała. W rzeczy samej, wśród par

wartości sobie odpowiadających niema z pewnością dwóch takich par

$$x_1, y_1$$
$$x_2, y_2,$$

spełniających warunek $x_1 \neq x_2$, lecz $y_1 = y_2$, albowiem $x_1 < x_2$ pociąga $y_1 < y_2$, a $x_1 > x_2$ pociąga $y_2 > y_1$, czyli w żadnym razie nie może być $y_1 = y_2$ Widzimy więc, że w tym wypadku odpowiedniość między elementami zbioru (X) i (Y) jest tego rodzaju, iż nie tylko każdej wartości zmiennej x odpowiada jedna tylko wartość zmiennej y, ale i odwrotnie jednej wartości zmiennej y odpowiada tylko jedna wartość zmiennej x. A więc odpowiedniość jest doskonała.

Zależność między dwiema zmiennemi, jako odpowiedniość między dwoma zbiorami (X) i (Y) z natury rzeczy jest odwracalna, bo sprowadza się ostatecznie do połączenia elementów obu zbiorów w pary, a para elementów, o ile nie wprowadzimy pobocznych względów, jest symetryczna względem obu elementów, t. j. oba te elementy odgrywają tę samą rolę; lecz, by takie połączenie w pary wyznaczało istotnie funkcję, mamy jeszcze warunek dodatkowy, mianowicie każdej wartości jednej zmiennej musi odpowiadać jedna tylko wartość drugiej i ten warunek dodatkowy właśnie narusza wzmiankowaną poprzednio symetrję, tak iż y może być funkcją zmiennej x, lecz x może nie być funkcją zmiennej y w tem znaczeniu, jakie nadaliśmy temu pojęciu funkcji poprzednio, (patrz l. 61).

W danym jednak wypadku, gdy zachodzi odpowiedniość doskonała między obu zbiorami (X) i (Y), obie zmienne mają tę samą rolę, czyli również dobrze y jest funkcją zmiennej x, jak x funkcją zmiennej y. Tak więc jedną i tę samą zależność między zbiorami (X) i (Y) można wyrazić dwojako, przyjmując jako zmienną niezależną raz x, drugi raz y; a więc będziemy mieli $y = f(x)$ i $x = \varphi(y)$, przyczem

każdą z tych funkcji f i φ będziemy nazywali *odwrotną* względem drugiej.

Udowodniliśmy więc, że jeżeli $y = f(x)$ jest funkcją rosnącą zmienej x, to istnieje funkcja odwrotna $x = \varphi(y)$. Łatwo się przekonać, że ta funkcja $x = \varphi(y)$ również jest rosnąca, albowiem gdy $y_1 < y_2$, to nie może być ani $x_1 = x_2$, ani $x_1 > x_2$, gdyż $x_1 = x_2$ pociąga $y_1 = y_2$, a $x_1 > x_2$ pociąga $y_1 > y_2$.

Rozważania poprzednie stosować będziemy przeważnie w tym tylko przypadku, gdy (X) jest pewnym przedziałem (m, n), t. j. w tym przypadku, gdy $y = f(x)$ jest funkcją, określoną w przedziale (m, n). W tym przypadku zbiór (Y) nie koniecznie stanowi zbiór wszystkich wartości pewnego przedziału, ale może być zbiorem mocy continuum wielce złożonym. Zbiór (Y) jest ograniczony od góry, co zresztą zawsze mą miejsce, o ile zbiór (X)* posiada największy element; niech n będzie ostatnim elementem zbioru (X), to jest największą liczbą, należącą do (X). Gdyby zbiór (Y) nie był ograniczony, możnaby znaleźć ciąg $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_p < \ldots$ liczb należących do (Y) i takich że $y_p \rightarrow \infty$, (patrz 44). Niech $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p, \ldots$ oznaczają odpowiednie wartości zbioru (X); ciąg ten musi być także rosnący, a ponieważ $x_p < n$, gdzie n oznacza ostatni element zbioru (X), to $f(x_p) = y_p < f(n)$, dla każdego p, co jest niemożliwe, gdyż $f(n)$ jest oznaczoną liczbą, a y_p dla odpowiednio dobranego wskaźnika może być większe od każdej liczby. Sprzeczność ta dowodzi, że (Y) może być zbiorem ograniczonym.

Zrobimy teraz dodatkowe założenie, mianowicie, że funkcja $y = f(x)$, wyznaczona w przedziale (m, n) jest funkcją ciągłą zmiennej x w tym przedziale. Wtedy zbiór (Y) odpowiadających wartości zmiennej y tworzy, jak wiemy, przedział (k, K), gdzie k i K są kresem dolnym i górnym

---

* Zbiór (X) na mocy założenia jest ograniczony.

zbioru (Y), (patrz l. 74). A więc funkcja odwrotna $x = \varphi(y)$ jest określona dla wszystkich wartości zmiennej y w przedziale (k, K), przyczem odpowiedniość między wartościami liczbowemi x i y, czyli punktami obu przedziałów (m, n) i (k, K) jest doskonała; $m = \varphi(k)$, $n = \varphi(K)$, $k = f(m)$, $K = f(n)$; każdej wartości $n \leqslant x \leqslant m$ odpowiada $k \leqslant y \leqslant K$ i odwrotnie.

Udowodnimy teraz, że z ciągłości funkcji $y = f(x)$ w (m, n) wynika ciągłość funkcji $x = \varphi(y)$ w (k, K). W tym celu wystarczy wskazać, że skoro tylko $y_n \to y$, to $\varphi(y_n) \to \varphi(y)$. Przypuśćmy więc, że ciąg $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p, \ldots$ zmierza do granicy y; niech $x_1 = \varphi(y_1)$, $x_2 = \varphi(y_2), \ldots$, $x_p = \varphi(y_p), \ldots$ Ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ jest ograniczony, gdyż $m < x_p < n$ dla każdej wartości wskaźnika p. Na mocy twierdzenia Weierstrassa (patrz l. 43), ciąg ten posiada przynajmniej jeden punkt skupienia. Twierdzę, iż ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p, \ldots$ jest zbieżny t. j. posiada granicę. Wystarcza w tym celu udowodnić, że posiada jeden tylko punkt skupienia, (patrz l. 44). Niech x oznacza którykolwiek z punktów skupienia ciągu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p, \ldots$ Z wybranych liczb tego ciągu, jak wiemy (patrz l. 45), można utworzyć ciąg, np., $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_p, \ldots$, taki że $\lim\limits_{p \to \infty} \xi_p = x$, t. j. wszystkie liczby ξ_l należą do liczb x_k, przyczem ciąg utworzony z liczb ξ_l, dla $l = 1, 2, 3, \ldots$ jest zbieżny i granicą jego jest właśnie punkt skupienia x ciągu $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $x_p, \ldots$, (który może nie być zbieżnym). Niech $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_p, \ldots$ oznaczają wartości zmiennej y, odpowiadające wartościom $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_p, \ldots$ zmiennej x, tak że $\eta_p = f(\xi_p)$; ciąg $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_p, \ldots$ utworzony jest z liczb należących do ciągu zbieżnego $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p, \ldots$; a więc ciąg $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, y_p, \ldots$ jest zbieżny i dąży do tej samej granicy y, czyli $\lim\limits_{\to\infty} \eta_p = y$. Ponieważ funkcja $y = f(x)$ jest funkcją

ciągłą zmiennej x, więc wzór $\eta_p = f(\xi_p)$ przez przejście do granicy daje

$$y = \lim \eta_p = \lim f(\xi_p) = f(\lim \xi_p) = f(x),$$

a więc $x = \varphi(y)$. Tak więc każdy punkt skupienia x ciągu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p, \ldots$ musi spełnić warunek $x = \varphi(y)$, przez co punkt skupienia x jest wyznaczony jednoznacznie; innemi słowy, ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ czyli ciąg $\varphi(y_1), \varphi(y_2), \ldots \varphi(y_p), \ldots$ posiada jeden tylko punkt skupienia $x = \varphi(y)$, czyli jest zbieżny, $(m < \varphi(y_p) < n)$. Udowodnimy więc, że skoro tylko $\lim\limits_{p \to \infty} y_p = y$, to $\lim\limits_{p \to \infty} \varphi(y_p) = \varphi(y) = \varphi(\lim y_p)$, co jest sprawdzianem ciągłości funkcji $x = \varphi(y)$ zmiennej y.

Do tych samych wyników dojdziemy, jeżeli założymy, że funkcja $y = f(x)$ jest malejąca w przedziale (m, n), gdzie ją określono, t. j. że $x_1 < x_2$ pociąga zawsze $y_1 > y_2$. Wtedy istnieje funkcja odwrotna $x = \varphi(y)$, również malejąca, przyczem, jeżeli $y = f(x)$ jest funkcją ciągłą w (m, n), to $x = \varphi(y)$ będzie również funkcją ciągłą w (k, K), gdzie k i K są kresami funkcji $f(x)$ w (m, n).

Wysłowienie następujące: „gdy x zmienia się w sposób ciągły od m do n, to y rośnie w sposób ciągły od k do K lub maleje w sposób ciągły od K do k jest teraz najzupełniej zrozumiałe; wyraża ono, że y jest funkcją ciągłą i rosnącą (lub malejącą) zmiennej x, przyczem $k = f(m)$, $K = f(n)$ w pierwszym przypadku, $k = f(n)$, $K = f(m)$ w drugim, $(m < n, k < K)$.

79. *Funkcja logarytmiczna przy zasadzie a.*

Funkcja wykładnicza $y = a^x$ czyni zadość powyższym warunkom w przedziale $(-l, +l)$, gdzie l jest dowolnie wielką liczbą dodatnią, gdy $a > 1$, gdyż jest wtedy funkcją ciągłą, rosnącą i gdy $0 < a < 1$, ponieważ jest wtedy funkcją ciągłą, malejącą zmiennej x w $(-l, +l)$. Stąd wynika, iż funkcja odwrotna $x = \varphi(y)$ jest funkcją ciągłą, rosnącą lub malejącą, zależnie od tego, czy $a > 1$, czy też $0 < a < 1$,

w przedziale (a^{-l}, a^{+l}). Przypuśćmy, że $a > 1$; $a^l > 1 + (a-1)l$ jak wiemy, (patrz l. 29) więc można liczbę l_0 wybrać tak, by $l > l_0$, pociągało $a^l > M$, czyli $a^l \to +\infty$, gdy $l \to +\infty$; ponieważ $a^{-l} = \frac{1}{a^l}$, więc $\lim\limits_{l \to +\infty} a^{-l} = 0$. A więc można zawsze liczbę l tak obrać by przedział (a^{-l}, a^l) zawierał dowolną liczbę $y > 1$. Gdy $0 < a < 1$, dochodzimy do tego samego wniosku, zważywszy, że $a^l = \left(\frac{1}{a}\right)^{-l}$ i $a^{-l} = \left(\frac{1}{a}\right)^l$. Funkcja w ten sposób określona nazywa się *funkcją logarytmiczną*, lub bliżej *logarytmem przy zasadzie a z liczby* y; oznaczamy ją symbolem $\mathrm{Log}_a y$; funkcja ta określona jest tylko dla wartości zmiennej, większych od zera. Związek między zmiennemi x i y, wyrażony przez $y = a^x$, jest identyczny ze związkiem, wyrażonym przez $x = \mathrm{Log}_a y$. Z równości $a^{x_1} . a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$ wynika więc $\mathrm{Log}_a (y_1 . y_2) = \mathrm{Log}_a y_1 + \mathrm{Log}_a y_2$. Ze związku $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$ wynika $\mathrm{Log}_a (y_2)^{x_2} = x_2 \mathrm{Log}_a y_2$; w pierwszym z tych dwóch wzorów $y_1 > 0$, $y_2 > 0$; w drugim $y_1 > 0$, x_1 może być liczbą rzeczywistą dowolną,

Określiliśmy nie jednę funkcję, lecz rodzinę funkcyj, gdyż liczba a może być dowolna; liczbę tę nazywamy zasadą. Zauważmy, że, jeżeli $b = a^k$, to $b^x = a^{kx}$, stąd wniosek, że stosunek $\frac{\mathrm{Log}_a y}{\mathrm{Log}_b y}$ nie zależy od wartości zmiennej y, i równa się k czyli $\mathrm{Log}_a b$ lub $\mathrm{Log}_b a$. Możemy więc z łatwością sprowadzać wszystkie funkcje $\mathrm{Log}_a y$ do jednej z nich, o pewnej ustalonej wartości zasady a. Z wielu względów na osobne wyróżnienie zasługuje zasada równa liczbie e (patrz l. 31).

Z tego powodu musimy wrócić do liczby e. Liczbę e określiliśmy w ustępie l. 31, jako granicę funkcji $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, gdy zmienna x dąży do zera, przybierając wartości równe wyrazom ciągu $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$; w rzeczy samej, przy

$x=\frac{1}{n}$, funkcja $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ przyjmuje wartość $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, powstaje więc ciąg $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$, ... Możemy teraz udowodnić, że granicą funkcji $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, gdy $x \to 0$, jest liczba e, skoro x przybiera dowolne wartości w zakresie liczb rzeczywistych. Przypuśćmy, że liczba x spełnia warunek $\frac{1}{n+1} \leqslant x < \frac{1}{n}$; wtedy, jak łatwo sprawdzić

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < (1+x)^{\frac{1}{x}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

czyli, oznaczając $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ przez $f(x)$, widzimy, że nierówność $\frac{1}{n+1} \leqslant x < \frac{1}{n}$ pociąga $\dfrac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{1+\frac{1}{n+1}} < f(x) < f\left(\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$, skąd już łatwy wniosek, że $f(x)$ dąży do e, gdy x prawostronnie zmierza do zera.

W przypadku, gdy x zmierza do zera lewostronnie, t. j. gdy $x<0$, wprowadzimy nową zmienną $z>0$, zmierzającą prawostronnie do zera, zapomocą podstawienia $1+x=\frac{1}{1+z}$; otrzymamy

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left\{(1+z)^{\frac{1}{z}}\right\}^{1+z}=(1+z)^{\frac{1}{z}}\,.\,(1+z).$$

Gdy x zmierza lewostronnie do zera, z zmierza prawostronnie do zera, a więc $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ zmierza do e, $1+z$ do jedności.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+z)^{\frac{1}{z}}(1+z)\right\}=e.$$

Można z łatwością sprowadzić do poprzedniego zadanie

wyznaczenia granicy funkcji $f(x)=(1+zx)^{\frac{1}{x}}$, gdzie z jest dowolną liczbą $\neq 0$.

$$f(x)=\{\varphi(x)\}^z, \text{ gdzie } \varphi(x)=(1+zx)^{\frac{1}{zx}};$$

gdy $x\to 0$, $zx\to 0$ i $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=e$ na mocy poprzedniego. Dalej $\lg f(x)=z\,.\lg\varphi(x)$, gdzie lg oznacza logarytm przy zasadzie e; ponieważ logarytm jest funkcją ciągłą, więc $\lim\limits_{x\to 0}\left[z\,.\lg\varphi(x)\right]=z\,.\lg\left\{\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)\right\}=z$, gdzie z jest stałe. Ponieważ w równości $\lg f(x)=z\,.\lg\varphi(x)$ strona druga posiada granicę, więc istnieje granica strony lewej, czyli także $\lim\limits_{x\to 0}\lg f(x)=z$; dalej $f(x)=e^{\lg f(x)}$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\lg f(x)}=$ $=e^{\lim \lg f(x)}$, ponieważ funkcja wykładnicza jest ciągła; ostatecznie $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=e^{\lim\lg f(x)}=e^z$, czyli $\lim\limits_{x\to 0}(1+zx)^{\frac{1}{x}}=e^z$; jeżeli np., x dąży do zera, przybierając wartości równe odwrotnościom liczb naturalnych, to otrzymamy wzór

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z,\quad n=1,2,3,\ldots$$

Na zakończenie tego rozdziału, wyznaczymy jeszcze granicę wyrażenia $\frac{a^x-1}{x}$, gdy x dąży do zera. Udowodniliśmy poprzednio, że $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$, tak więc licznik a^x-1 dąży do zera, mianownik też. Znane nam dotychczas metody, nie pozwalają odpowiedzieć na pytanie, czy funkcja $y=\frac{a^x-1}{x}$ posiada granicę dla $x\to 0$ i jeżeli posiada, czemu się ona równa. Zadanie to możemy rozwiązać w sposób następujący. Przedewszystkiem, możemy założyć, że $a\neq 1$, bo w przypadku, gdy $a=1$,

$a^x - 1$ równa się 0 dla każdego x, a więc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = 0$, $(a = 1)$. Podstawmy nową zmienną z, kładąc

$$a^x = 1 + z, \text{ (gdzie } a > 0 \text{ lecz } \neq 1),$$

gdy $a \to 0$, to z również dąży do zera. Funkcja y, określona przy każdej wartości $x \neq 0$, przyjmuje postać $\lg \frac{z \lg a}{(1+z)}$ ponieważ

$$x \log a = \lg (1 + z).$$

Tak więc zadanie nasze sprowadziliśmy do wyznaczenia następującej granicy

$$\lim_{z \to 0} \frac{z \lg a}{\lg (1+z)} = \lim_{z \to 0} \frac{\lg a}{\lg \left\{ (1+z)^{1/z} \right\}},$$

gdzie symbol lg oznacza logarytm przy zasadzie e. Lecz, jak wiemy, $\lim (1+z)^{1/z} = e$, więc $\log \lim (1+z)^{1/z} = 1$; ponieważ funkcja logarytmiczna jest ciągła, więc można przestawić symbol logarytmu i symbol granicy, tak że $1 = \log \lim (1+z)^{1/z} = \lim \log (1+z)^{1/z}$. Możemy więc napisać:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{z \to 0} \frac{\lg a}{\lg \{(1+z)^{1/z}\}} = \frac{\lg a}{\lim \{\log (1+z)^{1/z}\}} = \lg a.$$

Gdy $a = e$ i tylko wtedy powyższa granica równa się jedności, czyli

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

80. *Funkcje hiperboliczne.*

Funkcje hiperboliczne są związane w ten sam sposób z hiperbolą równoboczną, jak funkcje trygonometryczne z kołem. By wykład zyskał na jasności, poprzedźmy go krótkiem elementarnem przypomnieniem własności funkcyj trygonometrycznych, wyprowadzonych tą samą drogą.

Niech będzie dane koło trygonometryczne C (o pro-

mieniu $r=1$) i na nim punkt stały A i zwrot ustalający kierunek dodatni. Koło to odniesiemy do spółrzędnych prostokątnych; początek spółrzędnych umieścimy w środku koła, a osie skierujemy w ten sposób, by oś Ox przecinała koło właśnie w punkcie A i tak by odcięta punktu A była równa jedności (a nie -1). Niech M oznacza dowolny punkt na kole, a x i y jego współrzędne. Oznaczmy dalej przez u podwojone pole wycinka kołowego AOM; u równa się także długości łuku AM (w kierunku dodatnim) naszego koła. Każdej wartości u odpowiada wyznaczone położenie punktu M na kole, a więc i wartości spółrzędnych x i y tego punktu. Jasna rzecz, że odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe, t. j. temu samemu punktowi M, albo, co wychodzi na jedno, tej samej parze liczb x, y, odpowiada nieskończenie wiele wartości zmiennej u, różniących się o 2π. Ponieważ x i y punktu M są, jak widzieliśmy, funkcjami zmiennej u, więc będziemy mogli oznaczyć x przez $\cos u$, a y przez $\sin u$; ponieważ $x^2+y^2=1$, (równanie koła), więc w ten sposób określone funkcje $\cos u$ i $\sin u$ czynią zadość zależności $\cos^2 u+\sin^2 u=1$.

Dalsze własności tych funkcyj wyprowadzić można z teorji obrotu; w tym celu zbadamy przekształcenie linjowe $x'=ax+by$, $y'=cx+dy$, posiadające tę własność, że każdemu punktowi M na kole C o spółrzędnych x, y odpowiada przekształcony punkt M' o spółrzędnych x', y' na tym samym kole C; innemi słowy $x'^2+y'^2=x^2+y^2$; możemy z łatwością obliczyć wartości spółczynników a, b, c, d w $x'=ax+by$ i $y'=cx+dy$; podstawiając otrzymamy: $(ax+by)^2+(cx+dy)^2=(a^2+c^2)x^2+$ $+2(ab+cd)xy+(b^2+d^2)y^2=x^2+y^2$, a więc wspomniane współczynniki muszą czynić zadość warunkom

$$\begin{matrix} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \end{matrix}, \quad ab+cd=0.$$

Z tożsamości $(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2=(ad-cb)^2$, wynika $(ad-cb)^2=1$, więc $ad-cb=\tau$, gdzie $\tau=\pm 1$.

Równania $\begin{matrix} ab+cd=0 \\ ad-cb=\tau \end{matrix}$ dają

$$\left.\begin{matrix} a=d \\ b=-c \end{matrix}\right\} \text{ albo } \begin{matrix} a=-d \\ b=c \end{matrix},$$

zależnie od tego, czy τ równa się $+1$, czy -1. Otrzymaliśmy więc dwie klasy przekształceń:

$$\begin{matrix} x'=ax-by \\ y'=bx+ay \end{matrix} \quad \text{i} \quad \begin{matrix} x'=ax+by \\ y'=bx-ay; \end{matrix}$$

przyczem $a^2+b^2=1$;

pierwsza odpowiada obrotom, druga symetrji. W dalszym ciągu zajmować się będziemy tylko obrotami.

Niech M_1 i M_2 oznaczają dwa dowolne punkty na kole C o spółrzędnych x_1, y_1 dla M_1 i x_1, y_2 dla punktu M_2. Obrót zamieni nam punkt M_1 na M'_1, a punkt M_2 przekształci w M'_2; oznaczmy przez x'_1, y'_1 i x'_2, y'_2 spółrzędne tych dwóch punktów. Można z łatwością udowodnić, że pola wycinków kołowych M_1OM_2 i $M'_1OM'_2$ są sobie równe; możemy więc powiedzieć, że obrót przekształca wycinek koła na inny wycinek, o tem samem polu.*

Wróćmy do obrotu $x'=ax-by$, $y'=+bx+ay$, gdzie $a^2+b^2=1$; zauważymy, że spółczynniki a i b są związane ze sobą równaniem koła C, t. j. istnieje na kole C punkt N o spółrzędnych a i b; niech v oznacza podwojone pole wycinka AON; wtedy

$$a=\cos v,\ b=\sin v.$$

Obrót $x'=ax-by$, $y'=+bx+ay$, przekształca, jak łatwo sprawdzić, punkt A (1,0) na punkt $N(a,b)$; ten sam obrót przekształci punkt M w punkt M', tak iż wycinek

---

* Punkty M_2 i M_2 wyznaczają nieskończenie wiele wycinków, ale kwestja wielowartościowości nie sprawia w danym wypadku trudności i czytelnik sam ją sobie rozjaśni.

AON zamieni się na wycinek MOM'; a więc pola tych wycinków muszą być równe. Tak więc pole wynika $M'OA =$ polu wycinka $M'OM +$ pole wycinka $MOA =$ polu wycinka $MOA +$ pole wycinka NOA. Niech u oznacza pole wycinka MOA, v pole wycinka NOA; pole wycinka $M'OA = u + v$. Jeżeli x, y oznaczają spółrzędne punktu M, a x', y' spółrzędne punktu M', to

$$x' = ax - by$$
$$y' = bx + ay, \tag{16}$$

lecz $a = \cos v$, $b = \sin v$, $x = \cos u$, $y = \sin u$, $x' = \cos(u+v)$, $y' = \sin(u+v)$. Stąd (16) daje nam wzory na dodawanie

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$
$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u;$$

z tych wzorów możemy z łatwością otrzymać wzory na różnicę, na podwojenie i t. p.; zauważymy zresztą, iż przy rozszerzeniu funkcji $\cos u$ i $\sin u$ dla wartości ujemnych u zapomocą wzorów $\cos(-u) = \cos u$, $\sin(-u) = -\sin u$, ze wzorów na sumę $u + v$ można otrzymać wzory na różnicę $u - v$ przez zamianę v na $-v$; wzory te są następujące:

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$
$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \sin v \cos u.$$

Z tych wzorów otrzymać możemy przez dodawanie stronami

$$\cos(u+v) + \cos(u-v) = 2\cos u \cos v$$
$$\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2\sin u \cos v.$$

Pierwszy z tych wzorów jest kształtu:

$$f(u+v) - f(u-v) = 2f(u) . f(v). \tag{17}$$

Wzór ten stanowi równanie funkcyjne, którem się teraz zajmiemy. Chodzić nam będzie o znaleziezienie funkcyj ciągłych, czyniących zadość temu równaniu. Usuńmy najpierw raz na zawsze rozwiązanie trywialne $f(u) = 0$. Rozróżnimy dwa przypadki.

W rzeczy samej, niech w (17) $v = 0$, wtedy otrzymamy $2f(u) = 2f(u) . f(0)$, czyli $f(0) = 1$. Ponieważ w punkcie 0 nasza funkcja jest ciągła, więc w otoczeniu punktu zero-

wego przyjmuje wartości dodatnie; przypuśćmy, że $\alpha > 0$ należy do tego otoczenia punktu 0, t. j., że $\alpha > 0$ i dla $0 \leqslant x \leqslant \alpha$, funkcja $f(x)$ jest > 0. Napiszmy (17) w postaci $f(u+v) = 2f(u) \cdot f(v) - f(u-v)$ i połóżmy kolejno

$$u = \alpha, \quad v = \alpha$$
$$u = 2\alpha, \quad v = \alpha$$
$$u = 3\alpha, \quad v = \alpha \text{ i t. d.},$$

otrzymamy

$$f(2\alpha) = 2f(2\alpha) - 1$$
$$f(3\alpha) = 2f(2\alpha) \cdot f(\alpha) - f(\alpha)$$
$$f(4\alpha) = 2f(3\alpha) \cdot f(\alpha) - f(2\alpha).$$

Te wzory wyznaczą nam wartość funkcji $f(u)$ dla każdej wartości u kształtu $u = n\alpha$, gdzie n całkowite > 0.

Napiszemy teraz wzór (17) w postaci

$$f(u) f(v) = \tfrac{1}{2} \{f(u+v) + f(u-v)\}$$

i połóżmy kolejno:

$$u = v = \frac{\alpha}{2}; \quad u = v = \frac{\alpha}{4}; \quad u = v = \frac{\alpha}{8}, \ldots,$$

otrzymamy: $$f^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{f(\alpha) + 1\right\},$$

skąd określimy $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ jednoznacznie, ponieważ $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$; dalej

$$f^2\left(\frac{\alpha}{4}\right) = \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1\right\}; \quad f^2\left(\frac{\alpha}{8}\right) = \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 1\right\};$$

i t. d., skąd wyznaczamy jednoznacznie $f\left(\frac{\alpha}{4}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{8}\right), \ldots$, i t. d., wogóle $f\left(\frac{\alpha}{2^p}\right)$, gdzie p jest dowolną liczbą całkowitą, > 0.

Kładąc teraz $\frac{\alpha}{2^p} = \alpha_1$ i postępując z α_1 jak z α, znajdziemy wartości naszej funkcji $f(u)$ dla każdej wartości u kształtu $u = n\alpha_1 = \frac{n}{2^p}\alpha$.

Tak więc $f\left(\frac{n}{2^p}\alpha\right)$ ma wartość określoną dla każdej pary liczb całkowitych dodatnich n i p. Niech x oznacza dowolną liczbę rzeczywistą >0; można zawsze utworzyć ciąg liczb $w_1, w_2, \ldots, w_m, \ldots$ z pośród liczb kształtu $\frac{n}{2^p}\alpha$, takich, że $\lim_{n\to\infty} w_m = x$, ponieważ zbiór liczb $\frac{n}{2^p}\alpha$ jest wszędzie gęsty w dowolnym przedziale $(0, l)$, gdzie $l>0$; a więc każda liczba dodatnia x jest punktem skupienia tego zbioru. Posiłkując się ciągłością funkcji $f(u)$ określimy ją w punkcie $u=x$ zapomocą przejścia do granicy

$$f(x) = f(\lim_{m\to\infty} w_m) = \lim_{m\to\infty} f(w_m),$$

gdzie $f(w_m)$ jest liczbą wyznaczoną dla każdej wartości wskaźnika m.

Uczyńmy teraz w (17) $u=0$, otrzymamy $f(v)+f(-v)=2f(v)$, ponieważ $f(0)=1$, a więc $f(v)=f(-v)$; stąd wynika rozszerzenie funkcji $f(u)$ i dla wartości ujemnych zmiennej u.

Należałoby jeszcze sprawdzić, czy funkcja $f(u)$, określona dla wartości u kształtu $u=\frac{n}{2p}\alpha$, czyni zadość warunkom ciągłości (patrz l. 76); lecz tu, jest to oczywiste, o ile $f(\alpha)$ wybierzemy zgodnie z warunkiem $0 \leqslant f(\alpha) < 1$, bo wiemy, że istnieje taka funkcja, czyniąca zadość równaniu funkcyjnemu (17), mianowicie funkcja $\cos u$. Kąt θ wybierzemy w ten sposób, by $f(\alpha)=\cos\theta$, przyczem i $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Postępując jak poprzednio, otrzymalibyśmy $f\left(\frac{n\alpha}{2p}\right)=\cos\left(\frac{n}{2p}\theta\right)$; kładąc $u=\frac{n}{2p}\alpha$, będziemy mieli $f(u)=\cos\left(\frac{\theta}{\alpha}u\right)$, dla wszystkich wartości u kształtu $u=\frac{n}{2p}\alpha$; a więc na mocy ciągłości musimy mieć $f(u)=\cos(ku)$, gdzie $k=\frac{\theta}{\alpha}$ (stała). Dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej $u>0$, dla $u=0$ i wreszcie dla $u<0$.

Tak więc równanie funkcyjne (17) określa funkcję ciągłą jednoznacznie, o ile założymy że w otoczeniu punktu $u=0$ funkcja $f(u)$ przyjmuje wartości mniejsze od jedności; funkcją tą jest w tym przypadku funkcja $\cos(ku)$.

Do przypadku $f(\alpha)>1$ wrócimy później.

Funkcje hiperboliczne.

Zamiast koła $x^2+y^2=1$ weźmiemy dla określenia funkcyj hiperbolicznych krzywą, której równaniem jest $x^2-y^2=1$. Jest to hiperbola równoboczna; asymptotami są dwusieczne $x=y$ i $x=-y$. Ograniczymy się tylko do tej gałęzi hiperboli, której punkty mają odciętą dodatnią. Oś $0x$ przecina tę gałąź w punkcie A; niech M (patrz rys. 3) oznacza dowolny punkt na owej gałęzi hiperboli, a x i y spółrzędne tego punktu; na razie ograniczymy się do przypadku, gdy nie tylko x, ale i $y>0$. Określmy pole wycinka hiperboli MOA, t. j. pole, ograniczone promieniami wodzącemi OA, OM i łukiem AM hiperboli. W tym celu obieramy na łuku AM szereg punktów, połączymy je ze sobą linją łamaną i oprócz tego każdy z tych punktów połączymy z punktem O. Otrzymamy w ten sposób szereg trójkątów; będziemy teraz brali pod uwagę sumę pól w ten sposób utworzonych trójkątów. Podwajając liczbę punktów podziału na łuku AM tem samem podwajać będziemy liczbę składowych trójkątów. Jeżeli oznaczymy przez s_1, s_2, $s_3,\ldots$, $s_n,\ldots$ sumy pól tych trójkątów, to zauważymy, że ciąg s_1, s_2, $s_3,\ldots$ jest malejący;* z drugiej strony nie trudno się przekonać, że jest ograniczony od dołu, a więc musi posiadać granicę. Można dalej udowodnić, że granica ta nie zależy od prawa podziału wycinka AOM hiperboli

* Czytelnik, jako ćwiczenie, może na podstawie równania hiperboli naszej udowodnić, że jeżeli z jednej strony δ oznacza pole trójkąta OAB, gdzie A i B są punktami hiperboli, a δ_1 i δ_2 oznaczają pola trójkątów AOC i COB, to $\delta_1+\delta_2<\delta$, zakładając, że punkt C leży na hiperboli między punktami A i B.

na części przy pomocy punktów podziału na łuku AM, byle tylko pole każdego trójkąta w procesie granicznym dążyło do zera. Dowodu tego nie podajemy tutaj, gdyż odpowiednie rozważania w postaci znacznie obszerniejszej podane będą później przy określeniu całki, jako granicy sumy, (patrz l. 128) i czytelnik, obeznany z treścią tych rozważań sam z łatwością uzupełni tę lukę.

Granicę tylko co określoną nazywać będziemy polem wycinka AOM hiperboli.

Możemy przejść teraz do istoty naszych rozważań. Wprowadźmy parametr u, równy podwojonemu polu wycinka hiperbolicznego MOA, t. j. $u = 2s$, gdzie s jest tylko co określoną granicą ciągu $s_1, s_2, s_3, \ldots$ Gdy damy sobie $y > 0$, to tem samem punkt M jest określony jednoznacznie, a więc i pole s i parametr u; tak samo $x > 0$ określa jednoznacznie u, jeżeli umówimy się brać punkt M w pierwszej ćwiartce. Z rozważań geometrycznych, którym jednak można nadać szatę analityczną, widać, że u jest funkcją rosnącą zmiennej x; tak samo u jest funkcją rosnącą zmiennej y; funkcje te są funkcjami ciągłemi odpowiednich zmiennych. A więc odwrotnie wartości x i y spółrzędnych punktu M są funkcjami ciągłemi tego parametru u.

Odciętą x będziemy nazywali cosinusem hiperbolicznym parametru u, rzędną zaś y — sinusem hiperbolicznym parametru u. Oznaczać będziemy te funkcje symbolami.

$$x = Chu, \quad y = Shu.$$

Tangensem hiperbolicznym parametru u nazywać będziemy iloraz dwóch poprzednich funkcyj $\frac{Shu}{Chu}$ i oznaczać będziemy tę nową funkcję symbolem Thu.

Z określenia funkcji hiperbolicznych wynika związek następujący:

$$Ch^2u - Sh^2u = 1.$$

Dalej, gdy $\quad u = 0, \; Sho = 0, \; Cho = 1.$

Przekonamy się teraz, że funkcje hiperboliczne posiadają własności, analogiczne do własności odpowiednich funkcyj trygonometrycznych, mianowicie odpowiednie wzory na dodawanie i odejmowanie są zupełnie podobne, albo też różnią się znakami.

Wyprowadzimy najprzód wzory na dodawanie, t. j. znajdziemy zależność między funkcjami hiperbolicznemi parametru $u+v$, a funkcjami hiperbolicznemi parametrów u i v.

Zaczniemy od przekształcenia, które przez analogję nazwaćby można było obrotem hiperbolicznym.

Niech
$$x' = nx + my$$
$$y' = mx + ny$$
Podnosząc do kwadratu obie te równości i odejmując stronami, znajdziemy, że $x'^2 - y'^2 = (n^2 - m^2)(x^2 - y^2)$. Jeżeli więc spółczynniki n i m związane będą zależnością $n^2 - m^2 = 1$, t. j. czynią zadość równaniu hiperboli naszej, to
$$x'^2 - y'^2 = x^2 - y^2;$$
czyli różnica kwadratów spółrzędnych pozostaje bez zmiany; jeżeli więc x i y są spółrzędnemi punktu M na hiperboli, t. j. jeżeli $x^2 - y^2 = 1$, to i punkt przekształcony M' o spółrzędnych x', y' będzie także na hiperboli, gdyż $x'^2 - y'^2$ także równać się będzie 1.

Tak więc obrotem hiperbolicznym nazywać będziemy przekształcenie
$$x' = nx + my \tag{18}$$
$$y' = mx + ny,$$
gdzie $n^2 - m^2 = 1$, przyczem na razie ograniczymy się do przypadku, gdy $x > 0$, $y > 0$, $n > 0$, $m > 0$; wtedy i $x' > 0$ i $y' > 0$.

Niech M i N oznaczają dwa dowolne punkty hiperboli, należące do pierwszej ćwiartki, M' i N' punkty im odpowiadające przez obrót hiperboliczny (rys. 3). Niech

x i y oznaczają spółrzędne punktu M; x', y' — spółrzędne punktu M'; x_1 i y_1 spółrzędne punktu N: wreszcie x'_1 i y'_1 — spółrzędne punktu N'. Między spółrzędnemi x i y z jednej strony, x' i y' z drugiej zachodzi związek (18); tak samo między spółrzędnemi x_1 i y_1 z jednej, a x'_1, y'_1 z drugiej strony. Dwa wycinki hiperboliczne OMN i $OM'N'$ będziemy nazywać odpowiadającemi. Udowodnimy, że pola takich wycinków są sobie równe.

W tym celu połączmy cięciwami M z N i M' z N'; otrzymamy dwa trójkąty OMN i $OM'N'$, które będziemy nazywali trójkątami odpowiadającemi. Udowodnimy najprzód, że pola dwóch odpowiadających sobie trójkątów są zawsze równe; oznaczmy pola tych trójkątów przez S_{OMN} i $S_{OM'N'}$; jak wiemy z geometrji analitycznej,

$$2S_{MNO} = xy_1 - x_1y$$
$$2S_{OM'N'} = x'y_1 - x_1y';$$

wyrażając w ostatniej równości x', y' i x'_1, y'_1 w zależności od x, y z jednej strony, od x_1, y_1 z drugiej przy pomocy wzorów (18), otrzymamy:

$$x'y'_1 - x'_1y' = (nx+my)(mx_1+ny_1) - (nx_1+my_1)(mx+ny) =$$
$$= (n^2 - m^2)(xy_1 - x_1y);$$

ponieważ $n^2 - m^2 = 1$, więc $x'y'_1 - x'_1y' = xy_1 - x_1y$, czyli

$$2S_{OMN} = 2S_{OM'N'}$$

Zamiast trójkątów, będziemy rozważali teraz odcinki hiperboliczne odpowiadające; podzielmy każdy z nich na części w ten sposób, by punkty podziału na łukach MN i $M'N'$ odpowiadały sobie.

Pole s wycinka hiperboli OMN określiliśmy jako granicę, do której dąży suma s_n pól trójkątów, powstałych z połączenia punktów podziału z punktem O i między sobą linją łamaną, gdy pola tych trójkątów dążą wszystkie do zera; wtedy liczba punktów podziału nieograniczenie rośnie i $\lim_{n \to \infty} s_n = s$.

Podobnie określamy pole s' wycinka $OM'N'$ jako granicę $\lim_{n \to \infty} s'_n = s'$.

Ponieważ przy tym sposobie podziału na części, trójkąty, otrzymywane przez wstawianie nowych punktów podziału, są zawsze odpowiednio równe, więc są także równe i ich sumy, t. j. przy każdej wartości liczby całkowitej dodatniej n

$$s_n = s'_n;$$

z tego powodu równe są i granice tych sum, czyli pola dwóch wycinków sobie odpowiadających, t. j.

$$s = s'.$$

Można to krótko wyrazić tak: obrót hiperboliczny nie zmienia pola wycinka hiperboli.

Uzasadnijmy teraz wzór na dodawanie dla funkcji hiperbolicznych. Wróćmy do wzoru (18), wyrażającego obrót hiperboliczny. Ponieważ $n^2 - m^2 = 1$ i $n > 0$, $m > 0$, istnieje na hiperboli w pierwszej ćwiartce punkt N, którego spółrzędnemi są $x = n$ i $y = m$; n i m możemy więc wyrazić w zależności od parametru u; niech v będzie wartością tego parametru dla punktu N, t. j.

$$n = Ch v, \quad m = Sh v$$

Możemy sprawdzić, że przekształcenie (18) zmienia punkt $A(1,0)$ na punkt (n,m). Przypuśćmy, iż to samo przekształcenie (18) zmienia punkt $M(x, y)$ na punkt $M'(x', y')$; wtedy x' y' i x, y są związane zależnością, wyrażoną przez wzory (18). Niech dalej u oznacza parametr, odpowiadający punktowi M, a u' parametr, odpowiadający punktowi M', tak że:

$$x = Ch u, \quad y = Sh u,$$
$$x' = Ch u', \quad y = Sh u';$$

ale $u' = u + v$; w rzeczy samej wycinki hiperboli OAM i ONM' odpowiadają sobie, bo (18) **przekształca** A na N.

a M na M', a więc pola tych wycinków OAM i ONM' są sobie równe; stąd wynika odrazu, że pole wycinka AOM', równa się polu wycinka OAN + pole wycinka OAM, gdyż pole wycinka AOM' = polu wycinka OAN + pole wycinka ONM', pola wycinków OAM i ONM', jako odpowiadające, są sobie równe. Oznaczywszy przez $S_{OAM'}$ S_{OAM} i S_{OAN} pola tylko co omawianych wycinków hiperboli, znaleziony wynik możemy streścić przy pomocy wzoru

$$S_{OAM'} = S_{OAM} + S_{OAN},$$

co ze względu no to, że $2S_{OAM'} = u'$, $2S_{OAM} = u$, $2S_{OAN} = v$, można napisać w postaci

$$u' = u + v.$$

Tak więc:

$$x = Chu,\ y = Shu,\ n = Chv,\ m = Shv,$$
$$x' = Ch(u+v),\ y' = Sh(u+v);$$

wobec tego zależność między x', y' i x, y wyrażona przez (18) przybiera postać

(19) $$Ch(u+v) = Chu\,Chv + Shu\,Shv$$
$$Sh(u+v) = Shu\,Chv + Chu\,Shv.$$

Otrzymaliśmy szukane zależności. Jeżeli teraz $u + v$ oznaczymy przez w, to $v = w - u$, i rozwiązawszy poprzednie równania (19) względem Chv i Shv, otrzymamy wzory na różnicę:

(20) $$Ch(w-u) = Chw\,Chu - Shw\,Shu$$
$$Sh(w-u) = Shw\,Chu - Chw\,Shu.$$

Jeżeli teraz określimy Chu i Shu dla wartości ujemnych parametru u, zapomocą zależności $Ch(-u) = Chu$, $Sh(-u) = -Shu$, to wzory (20) można otrzymać wprost ze wzorów (19), podstawiając $-v$ zamiast v.

Że wzorów (19) i (20) możemy otrzymać wszystkie inne wzory z teorji funkcyj hiperbolicznych; tak np.,

$$Th(u+v)=\frac{Thu+Thv}{1+Thu.Thv},\quad Th(u-v)=\frac{Thu-Thv}{1-Thu\,Thv};$$

(21) $$Ch(u+v)+Ch(u-v)=2\,Chu.Chv;$$

$$Ch2u=Ch^2u+Sh^2u=1+2Sh^2u=2\,Ch^2u-1;$$

$$Sh2u=2Shu\,Chu;\quad Th2u=\frac{2\,Thu}{1+Th^2u}\text{ i t. d.}$$

Podobieństwo do wzorów trygonometrycznych jest uderzające. Wszystkie te wzory pozostają słuszne jak łatwo sprawdzić, gdy $u<0$.

Wyprowadzimy jeszcze wzory, analogiczne do wzorów Simpsona.

$$Chu+Chv=2\,Ch\frac{u+v}{2}\,Ch\frac{u-v}{2},$$

$$Chu-Chv=2\,Sh\frac{u+v}{2}\,Sh\frac{u-v}{2},$$

$$Shu+Shv=2\,Sh\frac{u+v}{2}\,Ch\frac{u-v}{2},$$

$$Shu-Shv=2\,Ch\frac{u+v}{2}\,Sh\frac{u-v}{2};$$

wzory te otrzymujemy ze wzorów (19) i (20), uwzględniając, że

$$u=\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2},\quad v=\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}.$$

Funkcje trygonometryczne dla $o<u<\frac{\pi}{2}$ czynią zadość nierówności

$$\sin u<u<\operatorname{tg} u,$$

z której wynika dzieląc przez $\sin u$,

$$1<\frac{u}{\sin u}<\frac{1}{\cos u},$$

czyli $\cos u<\frac{\sin u}{u}<1$; ponieważ $\frac{\sin(-u)}{-u}=\frac{\sin u}{u}$,

więc $\cos u < \frac{\sin u}{u} < 1$, dla $-\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$; stąd wynika

$\lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$

Możemy szereg podobnych wyników otrzymać i dla funkcyj hiperbolicznych.

Jeżeli połączymy punkt M hiperboli z punktem O, a w punkcie A na osi Ox przeprowadzimy styczną do hiperboli, (która będzie prostopadła do Ox), to promień OM odetnie na tej stycznej odcinek AK, który jest obrazem geometrycznym funkcji Thu; w rzeczy samej, z podobieństwa trójkątów OMP i OKA, gdzie $MPOx$, wynika $\frac{MP}{OP} = \frac{AK}{OA}$, czyli $AK = \frac{Shu}{Chu} = Thu$; wynik ten jest prawdziwy i dla $u < 0$. Niech $u > 0$; pole trójkąta OAK mniejsze jest od pola wycinka hiperboli OMA, czyli od $\frac{u}{2}$, to zaś ostatnie pole mniejsze jest od pola trójkąta OMA, czyli $OA . AK < u < OA . PM$, czyli $Thu < u < Shu$; ponieważ $u > 0$, możemy wszystkie wyrazy tej nierówności podzielić przez Shu, otrzymamy

$$\frac{1}{Chu} < \frac{u}{Shu} < 1,$$

czyli
$$1 < \frac{Shu}{u} < Chu;$$

ponieważ $\frac{Sh(-u)}{-u} = \frac{Shu}{u}$; $Ch(-u) = Chu$, więc powyższa nierówność pozostaje prawdziwą i dla $u < 0$. Zakładając, że $u \to 0$ i przechodząc do granicy, znajdziemy, że

$$\lim_{u \to 0} \frac{Shu}{u} = 1.$$

Zbadajmy jeszcze granicę $\frac{Chu - 1}{u}$, gdy $u \to 0$;

$$Chu = 2Sh^2\frac{u}{2} + 1;\quad Chu - 1 = 2Sh^2\frac{u}{2};\quad \frac{Chu-1}{u} = \frac{Sh\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}Sh\frac{u}{2};$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{Chu-1}{u} = \lim\frac{Sh\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\cdot\lim Sh\frac{u}{2} = 0;$$

tak więc $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{Chu-1}{u} = 0.$

Udowodnimy teraz fakt zasadniczy, że sumą Shu i Chu jest e^u, t. j. $Shu + Chu = e^u$.

W tym celu oznaczmy badaną sumę przez $f(u)$, t. j. niech $f(u) = Shu + Chu$; znajdziemy równanie funkcyjne, któremu czyni zadość funkcja $f(u)$, odpowiadające wzorowi na dodawanie; mianowicie

$$f(u+v) = Sh(u+v) + Ch(u+v) = Shu\,Chv + Shv\,Chu +$$
$$+ Chu\,Chv + Shu\,Shv = (Chu + Shu)(Chv + Shv) = f(u).f(v),$$

$$\text{t. j. } f(u+v) = f(u).f(v).$$

Udowodnimy, że równanie (22) wyznacza jedną tylko funkcję, jeżeli założymy jej ciągłość i damy jej wartość w punkcie $u = 1$, kładąc $f(1) = a$, gdzie a liczba stała > 0 i nie równa jedności, zresztą dowolna; ponieważ funkcja wykładnicza a^u czyni zadość powyższym warunkom, więc stąd wyniknie, że $f(u)$ jest funkcją wykładniczą.

Z (22), kładąc kolejno $u = v$; $v = 2u$; $v = 3u$; i t. d., otrzymamy: $f(2u) = \{f(u)\}^2$; $f(3u) = \{f(u)\}^3, \ldots, f(nu) = \{f(u)\}^n, \ldots$ gdzie n dowolną liczbą całkowitą dodatnia.

Z równości $f(nu) = \{f(u)\}^n$ znajdziemy $f(u) = \{f(nu)\}^{\frac{1}{n}}$, kładąc $nu = v$, mamy $f\left(\dfrac{v}{n}\right) = \{f(v)\}^{\frac{1}{n}}$; niech teraz $v = um$, gdzie m jest liczbą całkowitą dodatnią; poprzednia równość daje $f\left(\dfrac{m}{n}u\right) = \{f(um)\}^{\frac{1}{n}} = \{f(u)\}^{\frac{m}{n}}$; stąd wniosek, że z (22) wynika

$$f\left(\frac{m}{n}u\right)=\{f(u)\}^{\frac{m}{n}}.$$

Jeżeli $u=1$, to $f\left(\frac{m}{n}\right)=\{f(1)\}^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}$; czyli $f(x)=a^x$ dla tej wartości wymiernej zmiennej x. Stąd, biorąc pod uwagę ciągłość, wnosimy, że $f(u)=a^u$ dla każdej wartości dodatniej zmiennej u. Z (22) wynika, dla $v=0$, $f(u)=$ $=f(u).f(v)$, czyli $f(0)=1$ ponieważ nie może być $f(u)=0$; przy $v=-u$ z (22) wynika $f(0)=f(u).f(-u)$; czyli $f(-u)=\frac{1}{u}$; wynika stąd tożsamość funkcji, określonej przez (22) z funkcją wykładniczą dla $u=0$ i dla $u<0$.

Stąd wynika, że

$$Chu+Shu=a^u,$$

przyczem $a=Ch1+Sh1$; udowodnimy teraz, że $a=e$; w rzeczy samej $\lim\limits_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u}=\lg_e a$;

$$a^u-1=Chu-1+Shu$$

$$\frac{a^u-1}{u}=\frac{Chu-1}{u}+\frac{Shu}{u}$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{Chu-1}{u}+\lim_{u\to 0}\frac{Shu}{u};$$

lecz, jak widzieliśmy przed chwilą, pierwsza z tych granic równa się zeru, druga jedności, skąd w danym przypadku

$$\lim_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u}=1; \text{ czyli } \lg_e a=1;$$

stąd wynika, że $a=e$, co trzeba było udowodnić. Mamy więc ostatecznie dla wszystkich wartości x:

(23) $$Chx+Shx=e^x;$$

zmieniając x na $-x$, otrzymamy $Chx-Shx=e^{-x}$; dodając te dwie równości do siebie stronami, otrzymamy $2Chx=e^x+e^{-x}$; $2Shx=e^x-e^{-x}$; a więc

$$(24) \qquad Chx = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}); \quad Shx = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x});$$
$$Thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Zauważymy jeszcze, że ze wzorów $(e^x)^n = e^{nx}$, $(e^{-x})^n = e^{-nx}$, wynikają wzory

$$(Chx + Shx)^n = Chnx + Shnx$$
$$(Chx - Shx)^n = Chnx - Shnx.$$

Łatwo otrzymać wykres funkcji $y = Chx$ i $y = Shx$; mianowicie, w pierwszym przypadku $y = \frac{1}{2}, (e^x + e^{-x})$ (rys. 4) jeżeli więc wykreślimy funkcje $y_1 = e^x$ i $y_2 = e^{-x}$, to wykresem funkcji $y = Chx$ będzie miejsce geometryczne środków odcinków rzędnych, zawartych między obiema krzywemi, gdyż $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$. Krzywa ta nosi nazwę krzywej łańcuchowej. Przebieg jej zmienności jest następujący: gdy x rośnie od $-\infty$ do 0, to $y = Chx$ maleje od $+\infty$ do 1; gdy x rośnie od 0 do $+\infty$, to Chx rośnie od 1 do $+\infty$.

Zauważymy, że $Chx = \sqrt{1 + Sh^2x}$, przyczem, naturalnie, należy przed pierwiastkiem uwzględnić tylko znak $+$, ponieważ $Chx \geqslant 1$ dla każdej wartości zmiennej x.

Dla otrzymania rzędnych funkcji $y = Shx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, wykreślimy naprzód (rys. 4) $y_1 = e^x$ i $y_2 = -e^{-x}$ i wyznaczymy miejsce geometryczne środków odcinków rzędnych, zawartych między obiema krzywemi, gdyż i tutaj $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$. Przebieg zmienności jest następujący; gdy x rośnie od $-\infty$ do 0, Shx również rośnie od $-\infty$ do zera; gdy x rośnie od zera do $+\infty$, Shx również rośnie od 0 do $+\infty$. Shx jest więc funkcją rosnącą w całym zakresie istnienia.

Gdybyśmy chcieli otrzymać wykres krzywej $y = Thx$, najlepiej uwzględnić interpretację geometryczną tej funkcji, jako odcinek stycznej do hiperboli w punkcie A, (patrz rys. 3); gdy x rośnie do nieskończoności, punkt M oddala się na hiperboli, a kąt MOA, który jest zawsze mniej-

szy od $\frac{\pi}{4}$ zmierza do tej wartości jako do granicy; x jest tu podwojonem polem odcinka hiperboli. $AK = Thx$ jest mniejsze od 1 i dąży do 1, gdy $x \to +\infty$; gdy $x \to -\infty$, to $Thx \to -1$. Cała krzywa jest zawarta między dwiema prostemi równoległemi do osi Ox o równaniach $y = 1$ i $y = -1$; te proste są asymptotami.

Przebieg zmienności jest następujący: gdy x rośnie od $-\infty$ do 0, to Thx rośnie od -1 do 0; gdy x rośnie od 0 do $+\infty$, to Thx rośnie od 0 do $+1$.

Powiemy jeszcze parę słów o funkcjach odwrotnych względem funkcyj hiperbolicznych. Ponieważ sinus hiperboliczny jest funkcją rosnącą, ciągłą, więc odwrócenie daje nam funkcję jednoznacznie określoną i ciągłą, którą oznaczać będziemy, przez *argument sinus hiperboliczny*, $y = \arg Shx$; zależność, określona przez tę funkcję jest identyczna z zależnością $x = Shy = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$; jeżeli oznaczymy $e^y = z$, to $e^{-y} = \frac{1}{z}$ i otrzymamy związek

$$2x = z - \frac{1}{z},$$

skąd $z^2 - 2zx - 1 = 0$; a więc

$e^y = z = x + \sqrt{x^2 + 1}$; znak $-$ przed pierwiastkiem należy odrzucić (dlaczego?). Mamy więc ostatecznie

$$y = \arg Shx = \lg_e(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Żeby odwrócić funkcję cosinus hiperboliczny, ograniczymy się naprzód w zależności $x = Chy$ do wartości zmiennej $x > 0$; gdy y rośnie od 0 do $+\infty$, x rośnie od 1 do $+\infty$, więc odwracając będziemy mieli funkcję $y_1 = \arg Chx$, określoną dla wartości zmiennej $x \geqslant 1$, rosnącą i ciągłą. Niech teraz $y_2 = -y_1$; ponieważ cosinus hiperboliczny jest [illegible] $_1 = x$. Na tej podstawie możemy określić inną funkcję y_2, która wartościom zmien-

nej x większym od jedności podporządkowuje wartości na y równe co do wartości bezwzględnej funkcji poprzednio określonej $y_1 = \arg Chx$, lecz ze znakiem przeciwnym. Tak więc odwrócenie zależności $x = Chy$ daje nam dwie funkcje, określone dla wartości $x \geqslant 1$, mianowicie $\pm \arg Chx$. Możemy te funkcje wyrazić z łatwością przy pomocy funkcji logarytmowej. Zależność $x = Chy$ może być wyrażona w postaci

$$x = \tfrac{1}{2}(e^y + e^{-y});$$

niech $e^y = z$; mamy $z^2 - 2xz + 1 = 0$, skąd

$$e^y = z = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \text{ a więc}$$

$$y_1 = \lg_e(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad y_2 = \lg_e(x - \sqrt{x^2 - 1});$$

funkcje te są określone tylko dla $x \geqslant 1$; łatwo sprawdzić, że $y_1 > 0$, $y_2 < 0$, a $y_1 + y_2 = \lg_e(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \lg_e(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \lg_e\{x^2 - (x^2 - 1)\} = 0$, czyli $y_1 + y_2 = 0$ przy każdej wartości zmiennej x w zakresie istnienia tych funkcyj, t. j. dla $x \geqslant 1$.

Ponieważ funkcja tangens hiperboliczny jest funkcją określoną dla wszystkich wartości zmiennej, ciągłą i rosnącą od -1 do $+1$, więc odwrócenie nie przedstawia trudności i daje nam także funkcję ciągłą i rosnącą od $-\infty$ do $+\infty$ i określoną tylko w przedziale $(-1, +1)$; tak więc, odwracając zależność $x = Thy$, mamy $y = \arg Thx$, funkcję określoną dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Zależność $x = Thy$ jest identyczna z następującą: $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$; kładąc $e^y = z$, otrzymamy $x = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$, skąd $z^2 = \dfrac{1 + x}{1 - x}$, $z = e^y = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$, przyczem pierwiastek należy wziąć ze znakiem $+$, ostatecznie

$$y = \arg Thx = \tfrac{1}{2} \lg_e \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Wykresy trzech funkcyj $y = \arg Shx$, $y = \arg Chx$

i arg Thx otrzymamy z łatwością z wykresów funkcyj $y = Shx$, $y = Chx$ i $y = Thx$ przez symetrję względem dwusiecznej $y = x$.

Wróćmy jeszcze do równania funkcyjnego (17). Udowodniliśmy, iż istnieje jedna tylko funkcja ciągła, czyniąca zadość temu równaniu i przybierająca w punkcie α różnym od zera wartość z góry daną, $f(\alpha) < 1$, ale dodatnią, pod warunkiem, że $f(x)$ zachowuje znak stały, w przedziale $(0, \alpha)$. Funkcją ta jest funkcja $\cos(ku)$, gdzie liczba k jest tak dobrana, by $\cos(k\alpha) = f(\alpha)$ i $|k| < \frac{\pi}{2\alpha}$.

Gdy wartość szukanej funkcji $f(\alpha)$ jest większa od jedności, poprzednie rozwiązanie zawodzi, gdyż wtedy nie możemy nadać funkcji cosinus wartość równej $f(\alpha)$; dlatego też rozwiązanie w tym przypadku zostawiliśmy na później. Otóż teraz jesteśmy w możności to rozwiązanie podać. Przedewszystkiem czytelnik przekona się przy pomocy wzoru (21), że funkcja Chu spełnia równanie funkcyjne (17) Możemy teraz postąpić w sposób następujący; niech $f(\alpha) > 1$, możemy wtedy jednoznacznie wyznaczyć liczbę rzeczywistą $r > 1$, spełniającą równanie $\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) = f(\alpha)$. Następnie równanie (17) napiszmy w postaci:

$$f(u+v) = 2f(u) \, . \, f(v) - f(u-v) \tag{25}$$

i podstawmy kolejno: $u = \alpha$, $v = \alpha$; $u = 2\alpha$, $v = \alpha$; $u = 3\alpha$, $v = \alpha$; ...; otrzymamy: $f(\alpha) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$; $f(2\alpha) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)$;

$f(3\alpha) = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)\left(r + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2}\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right)$;

$f(4\alpha) = \frac{1}{1}\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right)\left(r + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{2}\left(r^4 + \frac{1}{r^4}\right)$; . . i t. d. wzór ogólny $f(n\alpha) = \frac{1}{2}\{r^n + r^{-n}\}$.

We wzorze $2f(u) \, . \, f(v) = f(u+v) + f(u-v)$ podstawmy kolejno: $u = \frac{\alpha}{2}$, $v = \frac{\alpha}{2}$; $u = \frac{\alpha}{4}$, $v = \frac{\alpha}{4}$; . . . i t. d.; otrzymamy:

$2\left\{f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}^2 = f(\alpha) + 1$; $f^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) + 1\right\} = \frac{1}{4}\left(r^{1/2} + r^{-\frac{1}{2}}\right)^2$;

$f^2\left(\frac{\alpha}{4}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(r^{1/2} + r^{-\frac{1}{2}}\right) + 1\right\} = \frac{1}{4}\left(r^{1/4} + r^{-\frac{1}{4}}\right)^2$; ... i t. d.; skąd

$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(r^{1/2}+r^{-\frac{1}{2}}\right);\ f\left(\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{4}}+r^{-\frac{1}{4}}\right);\ f\left(\frac{\alpha}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{8}}+r^{-\frac{1}{8}}\right);..$

wzór ogólny: $f\left(\frac{\alpha}{2^p}\right)=\frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2^p}}+r^{-\frac{1}{2^p}}\right).$

Jeżeli teraz we wzorze (25) podstawiać będziemy kolejno: $u=\frac{\alpha}{2^p}$, $v=\frac{\alpha}{2^p}$; $u=2\frac{\alpha}{2^p}$, $v=\frac{\alpha}{2^p}$; $u=3\cdot\frac{\alpha}{2^p}$, $v=\alpha$;... i t. d. to otrzymamy, postępując jak poprzednio,

$$f\left(\frac{n\alpha}{2^p}\right)=\frac{1}{1}\left(r^{\frac{u}{2^p}}+r^{-\frac{n}{2^p}}\right),\ \text{czyli, kładąc}\ \frac{n}{2^p}\alpha=u,$$

(26) $$f(u)=\frac{1}{2}\left(r^{\frac{u}{\alpha}}+r^{-\frac{u}{\alpha}}\right)$$

dla wszystkich wartości zmiennej u kształtu $u=\frac{n}{2^p}\cdot\alpha$, gdzie n i p przedstawiają dowolne liczby całkowite dodatnie. Ponieważ zbiór liczb powyższego kształtu $\frac{n}{2^p}\alpha$ jest wszędzie gęsty w przedziale $(0, +\infty)$, więc każda liczba rzeczywista dodatnia u jest granicą pewnego ciągu liczb, utworzonego z samych liczb kształtu $\frac{n}{2^p}\alpha$; a więc przechodząc do granicy i opierając się na ciągłości, możemy się przekonać, że wzór (26) jest spełniony dla każdej wartości rzeczywistej dodatniej zmiennej u; kładąc $r^{\frac{1}{\alpha}}=e^k$, gdzie $k=\frac{1}{\alpha}\lg_e r$, otrzymamy

$$f(u)=\frac{1}{2}(e^{ku}+e^{-ku})=Ch(ku).$$

Dotąd ograniczaliśmy się tylko do wartości $u>0$; lecz jeśli we wzorze (17) lub (25) uczynimy $u=0$, to otrzymamy $f(-v)=f(v)$, czyli funkcja, określona przez równanie funkcyjne (17) jest parzystą, jak cosinus hiperboliczny. Stąd wynika, iż

$$f(u)=Ch(ku),$$

dla każdej wartości u.

Funkcje wielu zmiennych.

81. *Pojęcia i określenia zasadnicze.*

Układ wartości liczbowych n zmiennych $x_1, x_2,..., x_n$, nazywamy *punktem analitycznym*; dwa punkty są iden-

tyczne, jeżeli wartości zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ w obu układach są jednakowe; tak, np., $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ przedstawiają ten sam punkt, wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Możemy teraz wyobrazić sobie zbiór (Z), którego elementami są punkty analityczne, będzie to zbiór złożony z punktów analitycznych. Jeżeli każdemu punktowi (czyli układowi n zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$) odpowiada wartość zupełnie określona zmiennej y, to mówimy, że y jest funkcją n zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ czyli punktu analitycznego, który to punkt dla krótkości oznaczać będziemy przez M. Tak więc, w dziedzinie wielu zmiennych zależność funkcjonalna, którą oznaczać będziemy symbolem $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jest odpowiedniością, między układami n liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ i wartościami jednej zmiennej y, odpowiedniością tego rodzaju, iż każdemu układowi $x_1, x_2, \dots, x_n$ pewnego zbioru (Z), odpowiada jedna i tylko jedna wartość zmiennej y. Zbiór (Z) jest to zbiór wartości zmiennych, dla których funkcja jest określona; odpowiadające wartości zmiennej y stanowią zbiór, który oznaczać będziemy przez (Y). Zamiast pisać $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ będziemy często pisali dla skrócenia $y = f(M)$, gdzie M oznacza punkt analityczny, którego spółrzędnemi są właśnie $x_1, x_2, \dots, x_n$. Jeżeli $n = 1$, mamy funkcje jednej zmiennej, któremi zajmowaliśmy się poprzednio. Jeżeli $n = 2$, mamy funkcję dwóch zmiennych, którą oznaczać będziemy często nie $y = f(x_1, x_2)$, lecz $z = f(x, y)$ ze względu na znakowania przyjęte w geometrji analitycznej. Jeżeli $n = 3$, mamy funkcję trzech zmiennych $y = f(x_1, x_2, x_3)$, którą oznaczać będziemy nieraz także przez $u = f(x, y, z)$. Gdy $n > 3$, będziemy zawsze używali znakowania $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Zbiór (Z), w którym funkcja jest określona, nazywamy ograniczonym, o ile spółrzędne $x_1, x_2, \dots, x_n$ wszystkich punktów zbioru (Z) stanowią zbiór liczb ograniczony od góry

i od dołu. Albo inaczej, każdemu punktowi $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ zbioru (Z) podporządkujmy liczbę l_M, gdzie

$$l_M = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|;$$

jeżeli zbiór liczb l_M, odpowiadających wszystkim punktom M zbioru (Z) jest ograniczony, to powiemy, że zbiór (Z) jest ograniczony.

Zbiór (Z), w którym funkcja jest określona, może być najrozmaitszy, lecz my najczęściej będziemy mieli do czynienia ze zbiorem (Z), który nazywać będziemy *obszarem normalnym*. Dla $n = 1$, obszar normalny jest przedziałem, dajmy na to (n, m), przytem, jak zwykle, przez przedział należy zawsze rozumieć przedział właściwy, o ile niema w tym względzie specjalnego zastrzeżenia. Dla $n = 2$, obszar normalny jest to zbiór punktów x_1, x_2, określonych w następujący sposób: liczba x_1 w układzie x_1, x_2 może być dowolną liczbą pewnego przedziału (m, n); liczba x_2, która łącznie z x_1 tworzy układ (x_1, x_2) wyznaczona jest przez warunek $\varphi_1(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi_2(x_2)$, t. j. należy do przedziału $(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$, którego krańce są funkcjami zmiennej x_1, przyczem oczywiście, funkcje $\varphi_1(x_1)$ i $\varphi_2(x_2)$ muszą dla każdej wartości x_1, należącej do przedziału (m, n), spełniać warunek $\varphi_1(x_1) \leqslant \varphi_2(x_1)$. Dla $n = 2$ obszarem normalnym jest zbiór wszystkich par liczb x_1, x_2, spełniających powyższe warunki. Dla $n = 3$ obszarem normalnym jest zbiór wszystkich trójek liczb x_1, x_2, x_3 spełniających następujące warunki:

$$m \leqslant x_1 \leqslant n,$$
$$\varphi_1(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi_2(x_1),$$
$$\psi_1(x_1, x_2) \leqslant x_3 \leqslant \psi_2(x_1, x_2);$$

t. j. x_1 należy do przedziału (m, n); x_2 należy do przedziału, którego krańce zależą od x_1; x_3 zaś należy do przedziału, którego krańce zależą od x_1 i x_2. Funkcje $\varphi_1(x_1)$ i $\varphi_2(x_2)$ muszą spełniać warunek $\varphi_1(x_1) \leqslant \varphi_2(x_1)$

dla wszystkich wartości x_1 przedziału (m, n); funkcje $\psi_1(x_1 x_2)$ i $\psi_2(x_1, x_2)$ muszą spełniać warunek $\psi_1(x_1. x_2) \leqslant \psi_2(x_1, x_2)$ dla wszystkich wártości x_1 należących do (m, n) i dla wszystkich wartości x_2, spełniających warunek $\varphi_1(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi_2(x_1)$. Czytelnik z łatwością sformułuje podobne warunki dla $n = 4, 5, ...,$ wogóle dla n jakiegokolwiek.

Przypuśćmy, że funkcja $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest określona dla wszystkich punktów analitycznych zbioru (Z), stanowiącego pewien obszar (D). Mówimy, że funkcja $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest *ograniczona* w obszarze (D), jeżeli istnieje liczba M większa od wszystkich wartości naszej funkcji w obszarze (D). Wtedy zbiór (Y) wartości, jakie przyjmuje zmienna y jest ograniczony (od góry i od dołu), a więc (patrz 1. 41) istnieją kresy K i k górny i dolny wartości funkcji w (D). Jeżeli funkcja $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ jest ograniczona tylko od góry, to istnieje tylko kres górny; jeżeli funkcja jest ograniczona tylko od dołu, to istnieje tylko kres dolny. Możemy w podobny sposób uogólnić inne określenia i pojęcia, które były rozważane poprzednio dla funkcji jednej zmiennej. Tak, np., *oscylacją* albo wahaniem się funkcji w pewnym obszarze $\triangle$, należącym do obszaru (D), w którym funkcja ograniczona jest określona, nazywa się różnica między wartością kresu górnego $K_\triangle$ i kresu dolnego $k_\triangle$ wartości, które przyjmuje nasza funkcja w $(\triangle)$. Jeżeli obszar $(\triangle_1)$ stanowi część obszaru $(\triangle_2)$, jeżeli $K_{\triangle_1}$ i $k_{\triangle_1}$ oznaczają odpowiednio kresy górny i dolny wartości funkcji w obszarze $(\triangle_1)$, a liczby $K_{\triangle_2}$ i $k_{\triangle_2}$ mają to samo znaczenie, ale dla obszaru $(\triangle_2)$, to

$$K_{\triangle_1} \leqslant K_{\triangle_2}; \quad k_{\triangle_1} \geqslant k_{\triangle_2}.$$

Widzieliśmy przy badaniu funkcji jednej zmiennej, jak wielkie znaczenie ma pojęcie „*otoczenia*“. Mówiliśmy, że funkcja posiada pewną własność w „otoczeniu“ punktu M, jeżeli istnieje przedział zawierający punkt M, taki, że dla wszystkich wartości funkcji $f(x)$ w tym przedziale, funkcja

$f(x)$ tę własność posiada. Chodzi nam teraz o to, by pojęcie „otoczenia" zastosować do funkcji wielu zmiennych. Niech M oznacza punkt analityczny $\overset{M}{x_1}, \overset{M}{x_2}, \dots, \overset{M}{x_n}$, w którym funkcja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest określona.

Weźmy teraz pod uwagę obszar $\triangle_\delta$, który jest utworzony ze wszystkich punktów analitycznych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, czyniących zadość warunkowi:

$$(27) \quad |\overset{M}{x_1} - x_1| + |\overset{M}{x_2} - x_2| + |\overset{M}{x_3} - x_3| + \dots + |\overset{M}{x_n} - x_n| < \delta,$$

gdzie δ jest liczbą dodatnią.

Jeżeli istnieje liczba δ dostatecznie mała, tak by dla wszystkich wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniających przy tej wartości δ warunek (27) *, t. j. jeżeli dla wszystkich punktów analitycznych odpowiedniego obszaru $\triangle_\delta$, funkcja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, czyli jej wartości liczbowe y posiadają pewną własność, to wyrażamy tę okoliczność krótko, mówiąc, że nasza funkcja posiada daną własność w „otoczeniu" punktu M.

Coś podobnego do otoczenia prawostronnego lub lewostronnego możemy wprowadzić i tutaj, zastrzegając, np., że w nierówności (27) wartości jednej zmiennej x_k (albo paru zmiennych) spełniają dodatkowy warunek $x_k \geqslant \overset{M}{x_k}$ albo też spełniają warunek $x_k \leqslant \overset{M}{x_k}$, gdzie k równa się jednej z liczb $1, 2, 3, \dots, n$).

82. *Funkcja dwóch zmiennych i jej obraz geometryczny.*

W przypadku $n = 2$ poprzednie rozważania dają się z łatwością interpretować geometrycznie i wskutek tego zyskują na jasności.

Przypuśćmy, że dana jest funkcja

$$z = f(x, y)$$

---

* I tutaj możemy, jak to czytelnik sam z łatwością sformułuje, rozróżniać otoczenie we właściwem i otoczenie w szerszem znaczeniu tego słowa.

dwóch zmiennych niezależnych x i y. Obieramy w przestrzeni trzy wzajemnie prostopadłe osie, przecinające się w punkcie O, nazywając je Ox, Oy, Oz. Położenie punktu M jest w zupełności wyznaczone przez trzy jego spółrzędne, x, y i z, t. j. przez odległości od płaszczyzn yOz, zOx i xOy. Odległości te oznaczymy odpowiednio literami x, y i z, sam zaś punkt przez $M(x, y, z)$. Oczywiście, spółrzędnym przypisujemy odpowiednie znaki; na rys. 5 kierunki dodatnie na każdej osi są zaznaczone przez strzałkę. Odwrotnie, każdej trójce liczb rzeczywistych x, y, z odpowiada jeden tylko punkt M w przestrzeni. Nie wchodzimy tutaj w stronę geometryczną sprawy i tylko co wspomnianą odpowiedniość między punktem M w przestrzeni, a trójką liczb rzeczywistych x, y, z przyjmujemy bez dowodu jako postulat geometryczny. Chodzi nam głównie o wytworzenie w czytelniku odpowiednich obrazów geometrycznych, co z wielu względów okazuje się pożądanem. Dla nas, z punktu widzenia analizy, punkt, np., jest to trójka liczb x, y, z; odległość między dwoma punktami jest pewną liczbą dodatnią, wyznaczoną w zależności od sześciu innych liczb, będących spółrzędnymi tych dwóch punktów i t. d. Dzięki jednak odpowiedniości doskonałej między utworami analitycznemi i geometrycznemi, możemy każdą równość albo nierówność między liczbami interpretować geometrycznie, jako związek we wzajemnem położeniu pewnych punktów w przestrzeni i w ten sposób możemy dowód danego twierdzenia, jak gdyby, widzieć, a przynajmniej śledzić oczyma. Czyni to dowody zrozumialszemi, a nieraz nawet podsuwa nowe pomysły.

Wróćmy do funkcji $z = f(x, y)$. Funkcja ta jest określona w pewnym obszarze (D), który w tym przypadku stanowi pewien zbiór punktów x, y na płaszczyźnie xOy. Tak więc, by mieć interpretację geometryczną wartości zmiennych niezależnych x, y możemy ograniczyć się do

płaszczyzny xOy. Każdej parze liczb x, y odpowiada na płaszczyźnie xOy pewien punkt P; jeżeli ten punkt P należy do obszaru (D), w którym funkcja nasza jest określona, to parze liczb x, y odpowiada na mocy zależności funkcjonalnej, trzecia spółrzędna z; jeżeli teraz na prostopadłej do xOy, wystawionej z punktu P, odetniemy od punktu P jako od punktu początkowego odcinek PM w kierunku dodatnim lub ujemnym, zależnie od znaku liczby z, to otrzymamy w przestrzeni punkt M, obraz geometryczny trójki liczb, (x, y, z) (patrz rys. 5). Jeżeli opisaną tylko co konstrukcję powtórzymy w myśli dla każdego punktu P obszaru (D) na płaszczyźnie xOy, którym to obszarem może być, np., prostokąt, to otrzymamy nieskończenie wiele punktów M w przestrzeni i zbiór tych wszystkich punktów M będziemy nazywali powierzchnią, niezależnie od tego, czy to miejsce geometryczne punktów M posiada w większym lub mniejszym stopniu właściwości, któreśmy zwykli przypisywać powierzchni. Obszar (D) na płaszczyźnie xOy nazywamy rzutem tylko co wspomnianej powierzchni, a punkt P rzutem punktu M. Istnieje więc odpowiedniość doskonała, między punktami M owej powierzchni i punktami P obszaru (D), przyczem P jest rzutem punktu M.

Przypuśćmy, że y zachowuje wartość stałą, zmienia się tylko x; wówczas punkt $P(x, y)$ posuwać się będzie na płaszczyźnie xOy wzdłuż prostej, równoległej do osi Ox; odpowiadający punkt M będzie się poruszał w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny xOz i zakreśli w tej płaszczyźnie pewne miejsce geometryczne, pewną krzywą. Gdybyśmy ustalili x, to przy zmiennym y punkt P utworzyłby odcinek równoległej do Oy, a punkt M zakreśliłby pewną krzywą w płaszczyźnie równoległej do yOz. Gdyby zmienna y była związana ze zmienną x jakąś zależnością $y = \varphi(x)$, punkt P ze zmianą zmiennej x zakreśliłby pewną

krzywą (naogół skośną) w przestrzeni, której rzutem na xOy jest krzywa $y=\varphi(x)$.

Mówimy, że funkcja

$$z=f(x,y)$$

jest określona w pewnym obszarze, gdy znamy jej wartość w każdym punkcie P tego obszaru. Jeżeli obszar jest normalny, to w pewnem paśmie* każda równoległa do jednej z osi, (np., równoległa do osi Oy) ma z tym obszarem (D) jeden odcinek wspólny i tylko jeden, (odcinek ten może czasem składać się z jednego tylko punktu i wtedy będziemy go nazywali odcinkiem niewłaściwym). Wynika to z określenia obszaru normalnego przy pomocy nierówności:

$$m \leqslant x \leqslant n$$
$$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x).$$

W niektórych przypadkach do tych warunków dołączymy dodatkowe założenie, tyczące się ciągłości funkcji $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ w przedziale (m,n). Jeżeli funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$, pozostając ograniczonemi w (m,n), posiadają skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju (skoków, patrz l. 73), to możemy taki obszar podzielić na skończoną liczbę obszarów normalnych w znaczeniu tylko co ustalonem.

Odwrotnie, jeżeli w pewnym paśmie każda równoległa do osi Oy ma z (D) wspólny odcinek i tylko odcinek, to obszar (D) może być podany przy pomocy nierówności:

$$m \leqslant x \leqslant n$$
$$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x).$$

Obszar (D) jest ograniczony, jeżeli współrzędne x i y wszystkich jego punktów są ograniczone; przypuśćmy,

---

* Pasmem nazywamy zbiór punktów na płaszczyźnie, zawartych między dwoma prostemi równoległemi.

np., że wartości bezwzględne współrzędnych x, y wszystkich punktów M obszaru (D), są mniejsze od liczby L; jeżeli z początku spółrzędnych jako ze środka, opiszemy koło promieniem $2L$, to wszystkie punkty obszaru (D) będą wewnątrz tego koła. Odwrotnie, o ile można zakreślić takie koło, że wszystkie punkty należące do obszaru (D) są wewnątrz tego koła, to obszar (D) jest ograniczony.

Jednym z najprostszych obszarów (D) jest prostokąt; obszar taki jest dany analitycznie przez nierówności

$$a \leqslant x \leqslant b$$
$$c \leqslant y \leqslant d.$$

gdzie punkty o spółrzędnych a, c; a, d; b, d; b, c; są wierzchołkami, a boki są równoległemi do osi Ox i Oy. Taki obszar jest, oczywiście, ograniczony i normalny.

Prostokąt o bokach równoległych do dwusiecznych jest wyznaczony przez nierówność

$$|x-a|+|y-b| \leqslant l;$$

środkiem tego prostokąta jest punkt o spółrzędnych a, b; przekątna równa się $2l$. Obszar ten jest także ograniczony i normalny, a więc może być przedstawiony analitycznie zapomocą dwóch nierówności, odpowiadających obszarowi normalnemu

$$a-l \leqslant x \leqslant a+l$$
$$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),$$

gdzie $\varphi_1(x) = -x+b+a-l$, dla $a-l \leqslant x \leqslant 0$,

$\varphi_1(x) = x+b-a-l$, dla $0 \leqslant x \leqslant a+l$:

$\varphi_2(x) = x+b-a+l$, dla $a-l \leqslant x \leqslant 0$,

$\varphi_2(x) = -x+b+a+l$, dla $0 \leqslant x \leqslant a+l$.

Innym prostym przykładem obszaru (D) jest zbiór punktów koła o środku w punkcie $C(a, b)$ i o promieniu r; zbiór ten wyrażony jest przez nierówność,

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2$$

t. j. zbiór (D) jest utworzony przez wszystkie punkty płaszczyzny xOy, spełniające powyższy warunek. Obszar w ten sposób wyznaczony jest ograniczony i normalny. Można

określić ten obszar w postaci zwykłej uwidaczniającej jej normalność przy pomocy dwóch nierówności:

$$a - r \leqslant x \leqslant a + r$$

$$b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \leqslant y \leqslant b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$$

Przykłady innych obszarów (D) czytelnik znajdzie w ćwiczeniach.

Otoczeniem punktu P na płaszczyźnie xOy nazywać będziemy prostokąt lub koło, o środku w punkcie P i którego rozmiary są tak małe, jak się podoba. Tak, np., punkt M o spółrzędnych x, y należy do otoczenia punktu P o spółrzędnych x_0, y_0, jeżeli

$$|x - x_0| \leqslant \eta, \quad |y - y_0| \leqslant \delta,$$

gdzie η i δ są to liczby dodatnie stałe, które mogą być tak małe, jak się podoba. Zamiast poprzednich nierówności można otoczenie punktu P określić przy pomocy

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant \rho,$$

gdzie ρ jest liczbą dodatnią stałą, dowolnie małą. Funkcja $f(x, y)$ posiada pewną własność w „otoczeniu" punktu P, jeżeli wszystkie wartości funkcji, odpowiadające wszystkim wartościom zmiennych x, y, spełniających jeden z dwóch poprzednich warunków, własność tę posiadają; oczywiście, o ile wybierzemy na liczby η i δ, ewentualnie ρ, liczby dostatecznie małe.

83. *Ciągłość funkcji dwóch zmiennych.*

Określenie. Będziemy mówili, że funkcja $f(x, y)$ jest *ciągła* w punkcie P o spółrzędnych x, y, *jeżeli do dowolnie małej liczby dodatniej* ε *możemy dobrać takie otoczenie punktu* P, *że dla dowolnego punktu* M *o spółrzędnych* x', y' *tego otoczenia zachodzi nierówność*

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon,$$

co będziemy pisali także

$$|f(M) - f(P)| < \varepsilon.$$

Innemi słowy, *do każdej liczby* $\varepsilon > 0$, *można dobrać taką liczbę* $\eta > 0$, *że nierówności:*

$$|x' - x| < \eta, \quad |y' - y| < \eta,$$

pociągają nierówność

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon. \tag{28}$$

Jasna rzecz, że rozważania, tyczące się ciągłości funkcji $f(x, y)$ w punkcie P można poprzedzić, jak przy funkcji jednej zmiennej, określeniem pojęcia granicy funkcji w punkcie P. *Granicą wartości funkcji w punkcie $P(x, y)$ jest liczba g, jeżeli do każdej dowolnie małej liczby* $\varepsilon > 0$ *można dobrać taką liczbę* η, *że dla wszystkich wartości x' i y', spełniających warunki* $|x' - x| \leqslant \eta$, $|y' - y| \leqslant \eta$, z wyjątkiem może wartości $x' = x$, $y' = y$, zachodzi nierówność

$$|f(x', y') - g| < \varepsilon.$$

Granica ta g może istnieć, lecz może nie być równa wartości funkcji w punkcie P, jak naprzykład, dla funkcji, określonej w sposób następujący: gdy x i y nie są jednocześnie równe zeru, to niech $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 5}$; $f(0, 0)$ zaś równa się, np., zeru.

Granicą tej funkcji w punkcie początkowym P jest, oczywiście, $\frac{1}{5}$; tymczasem wartością funkcji w punkcie początkowym jest zero.

Jeżeli istnieje granica funkcji w punkcie P i jeżeli granica ta g równa się wartości funkcji w punkcie P, to funkcja jest ciągła. W rzeczy samej, istnienie granicy g pociąga spełnienie warunków, wyrażonych przez nierówności (29), lecz ponieważ $g = f(x, y)$, więc podstawiając tę wartość w (29), odpowiadające nierówności zamieniają się na warunki (28), które są wyrazem ciągłości funkcji w punkcie P.

Mogło by się wydawać, że funkcja musi być ciągła w punkcie P, o spółrzędnych (x_0, y_0), jeżeli jest ciągła oddzielnie względem zmien-

nej x, przy y stałem, ale dowolnem i względem zmiennej y przy x stałem; t. j. jeżeli założymy, że $f(x, y)$ jako funkcja jednej tylko zmiennej x jest ciągłą dla $x = x_o$ i że $f(x, y)$ jako funkcja jednej tylko zmiennej y jest ciągłą dla $y = y_o$, Otóż tak nie jest. Przekonać się o tem można przez zbadanie następującego przykładu.

Dana jest funkcja określona w sposób następujący:

$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, o ile x i y nie są jednocześnie równe zeru, t. j. we wszystkich punktach, z wyjątkiem punktu początkowego; w punkcie początkowym funkcja nasza równa się 0, t. j. $f(0, 0) = 0$. Funkcja nasza jest ciągła, gdy zbliżamy się do punktu początkowego wzdłuż osi Ox lub wzdłuż osi Oy; jeżeli punkt M jest położony na osi Ox, to y tego punktu jest O i $f(M) = 0$; jeżeli punkt M położony jest na osi Oy, to x tego punktu jest 0 i wskutek tego także $f(M) = 0$. Ponieważ $f(0) = 0$, więc ciągłość funkcji w obu tych przypadkach jest oczywista.

A jednak nasza funkcja, jako funkcja dwóch zmiennych x i y, jest nieciągła w punkcie 0. Zwróćmy uwagę iż wartość funkcji naszej $f(M_o)$ w punkcie M_o nie leżącym na osi Oy (t. j. na prostej $x = 0$), może być wyrażona w postaci następującej:

$$f(\mathrm{M}) = \frac{2\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)};$$

połączmy punkt M_o z punktem O i oznaczmy kąt M_oOX, t. j. kąt promienia wodzącego OM_o z osią OX, przez α; wtedy $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$,

$f(M_o) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sin 2\alpha$; wartość ta nie równa się zeru, o ile punkt M_o nie leży ani na osi Ox, ani na osi Oy, gdyż wtedy $\sin 2\alpha \neq 0$. Niech teraz punkt M zbliża się do punktu O wzdłuż prostej OM_o. Stosunek $\frac{y}{x}$ będzie miał wartość stałą $= \operatorname{tg}\alpha$ i funkcja $f(M)$ w każdym punkcie prostej OM będzie miała wartość stałą $\sin 2\alpha \neq 0$; ponieważ $f(0) = 0$, więc

$$|f(0) - f(M)| = |\sin 2\alpha|;$$

a więc niema takiego otoczenia punktu 0, by w tem otoczeniu było

$$|f(0) - f(M)| < \varepsilon,$$

dla dowolnie małego ε, gdyż o ile $\varepsilon < |\sin 2\alpha|$, dla punktu, obranego jak powyżej i dowolnie blizkiego punktu zerowego, mamy

$$|f(0) - f(M)| > \varepsilon.$$

A więc nasza funkcja jest nieciągła w punkcie $x = 0$, $y = 0$ Czytelnik zbada jeszcze przykład funkcji określonej w sposób następujący: o ile $x \neq 0$, $y \neq 0$, to $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2x}$; o ile $x = 0$, lub $y = 0$, to wartość funkcji równa się zeru. Czytelnik udowodni, że ta funkcja jest nieciągła w punkcie $x = 0$, $y = 0$, chociaż jest ciągła, gdy zbliżamy się do tego punktu wzdłuż jakiejkolwiek prostej, z wyjątkiem prostej $x = 0$.

Funkcja jest ciągła w obszarze (D), jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego obszaru.

Tutaj wskazanem będzie powiedzieć parę słów o obszarach (D), któremi będziemy się zajmować. Każdy obszar (D) jest zbiorem (Z) punktów M płaszczyźnie xOy czyli par liczb x, y. Punkt należący do (Z) nazywa się *wewnętrznym* punktem zbioru (Z), jeżeli istnieje otoczenie tego punktu (w postaci koła, np.), którego wszystkie punkty są punktami zbioru (Z); punkt nazywa się *zewnętrznym* punktem zbioru (Z), jeżeli nie należy do (Z) i w otoczeniu tego punktu niema punktów zbioru (Z). Jeżeli zaś punkt M należy do (Z), ale w otoczeniu jego niema punktów zbioru (Z), to nazywa się punktem *odosobnionym* tego zbioru. Punktem *skupienia* zbioru (Z) nazywamy punkt, którego w dowolnie małem otoczeniu znajduje się nieskończenie wiele punktów zbioru (Z). Punkt skupienia zbioru może do zbioru należeć lub nie; jeżeli, np., zbiorem (Z) jest zbiór wszystkich punktów o spółrzędnych x, y wymiernych pewnego prostokąta na płaszczyźnie xOy, to wszystkie punkty owego prostokąta są punktami skupienia zbioru, przyczem te z pośród nich, których spółrzędne x i y są wymierne należą do (Z), te zaś których spółrzędne tego warunku nie spełniają, nie należą do (Z). Jeżeli punkt M na-

leży do (Z), i nie jest punktem odosobnionym tego zbioru, to musi być punktem skupienia zbioru (Z).

Jeżeli wszystkie punkty skupienia zbioru (Z) należą do (Z), to zbiór (Z) nazywa się *zamkniętym* lub *domkniętym*. Zbiorem *pochodnym* (Z') nazywamy zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru (Z). Możemy więc krótko określić zbiór domknięty, jako zbiór, posiadający tę własność, że każdy punkt zbioru pochodnego (Z') należy do (Z), czyli że (Z') jest zawarte w (Z).

Jeżeli każdy punkt zbioru (Z) należy do zbioru pochodnego (Z'), czyli jak mówimy, zbiór (Z) zawarty jest w (Z'), to zbiór nazywa się *gęstym w sobie*. Każdy punkt takiego zbioru jest punktem skupienia. Zbiór taki, punktów odosobnionych posiadać nie może. Odwrotnie, każdy zbiór, który nie posiada punktów odosobnionych jest gęsty w sobie.

Zbiór, który jest jednocześnie zbiorem domkniętym i gęstym, nazywa się *doskonałym*.

Jeżeli do każdej pary M_1 i M_2 dwóch punktów, należących do (Z) i do każdej dowolnie małej liczby dodatniej ε można dobrać ciąg punktów, z których pierwszym jest punkt M_1, a ostatnim jest punkt M_2, przyczem odległość między dwoma kolejnemi punktami tego ciągu (utworzonego ze skończonej liczby punktów należących do (Z), jest mniejsza od ε, i jeżeli zbiór jest domknięty, to zbiór taki nazywa się *continuum*. Zbiór taki jest gęsty w sobie; w rzeczy samej, gdyby punkt M był punktem odosobnionym, to nie mógłby być związany z żadnym innym punktem tegoż zbioru takim ciągiem punktów, których odległość kolejna mniejsza jest od ε, o ile ε mniejsze jest od promienia koła izolującego punkt odosobniony M; a brak punktów odosobnionych pociąga gęstość zbioru. Continuum jest więc zbiorem doskonałym; nie każdy zbiór doskonały jest continuum; naprzykład zbiór, utworzony przez punkty, należące do

okręgów dwóch kół spółśrodkowych, o różnych promieniach, jest, oczywiście, doskonały, ale nie jest continuum; by to okazać, wystarczy punkty M_1 i M_2 wybrać na okręgach dwóch różnych kół, a jako ε wziąć liczbę mniejszą od różnicy promieni większego i mniejszego koła.

Weźmy teraz obszar normalny (D)

$$m \leqslant x \leqslant n$$

$$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x). \tag{30}$$

Można udowodnić, że obszar (D), określony jako zbiór (Z) punktów (x, y), określonych przez poprzednie warunki (nierówności) (30) jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, o ile funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są ciągłe w (m, n).

Przypuśćmy, że punkt ξ, η nie należy do (D) lecz jest punktem skupienia dla zbioru (D). W takim razie, jak łatwo udowodnić, można znaleźć taki ciąg liczb x_1, x_3, $x_3, \ldots, x_p, \ldots$ i liczb $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p, \ldots$ takich, że punkt o spółrzędnych x_p, y_p należy do (D) i jednocześnie do otoczenia punktu ξ, η, jakkolwiek wielką jest liczba całkowita p, tak, że

$$\lim_{p \to \infty} x_p = \xi, \quad \lim_{p \to \infty} y_p = \eta, \quad \text{lecz}$$

$$m \leqslant x_p \leqslant n$$

$$\varphi_1(x_p) \leqslant y_p \leqslant \varphi_2(x_p); \tag{31}$$

ponieważ funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są ciągłe, więc

$$\lim_{p \to \infty} \varphi_1(x_p) = \varphi_1(\lim_{p \to \infty} x_p) = \varphi_1(\xi)$$

$$\lim_{p \to \infty} \varphi_2(x_p) = \varphi_2(\text{lm}_{p \to \infty} x_p) = \varphi_2(\xi),$$

a więc (31) przez przejście do granicy daje

$$m \leqslant \xi \leqslant n$$

$$\varphi_1(\xi) \leqslant \eta \leqslant \varphi_2(\xi),$$

czyli punkt ξ, η należy do (D). Obszar (D) jest więc zbiorem zamkniętym.

Możemy teraz udowodnić, że (D) jest continuum. Niech M_1 i M_2 oznaczają dwa dowolne punkty obszaru (D). Jeżeli punkt M_1, np., nie należy ani do zbioru punktów, określonych przez $m \leqslant x \leqslant n$; $y = \varphi_1(x)$, który to zbiór nazwiemy krzywą C_1, ani do zbioru punktów, określonych przez $m \leqslant x \leqslant n$; $y = \varphi_2(x)$, który to zbiór nazwiemy krzywą C_2, i jeżeli A i B oznaczają dwa punkty odpowiednio na krzywych C_1 i C_2, o tej samej odciętej, co punkt M_1, to odcinek AB, zawierający punkt M_1, należy do (D); możemy więc z punktów obszaru (D) utworzyć ciąg punktów, których odległość kolejna nie dosięga ε, między M_1 i A lub między M_1 i B. Dla udowodnienia, że (D) jest continuum, wystarczy więc udowodnić, że między dwoma dowolnemi punktami M i N tej samej krzywej C_1 można znaleźć ciąg punktów, należących do tej samej krzywej, których odległość kolejna nie dosięga ε. Jest to wynik ciągłości. Niech a i b oznaczają odcięte punktów M i N; przedział (a, b) podzielić można punktami pośredniemi na części tak, by oscylacja funkcji ciągłej $y = \varphi_1(x)$ w każdym z tych przedziałów częściowych była mniejsza od $\frac{1}{2}\varepsilon$ i tak by każdy z tych przedziałów częściowych był sam mniejszy od $\frac{1}{2}\varepsilon$. Weźmy teraz pod uwagę szereg punktów na krzywej C_1, odpowiadających odciętym a, b i odciętym punktów podziału utworzonych przedziałów; odległość dwóch kolejnych punktów tego szeregu punktów jest mniejsza od $\sqrt{(\frac{1}{2}\varepsilon)^2 + (\frac{1}{2}\varepsilon)^2}$, a więc jest mniejsza od ε; pierwszym z tych punktów jest A, ostatnim jest B.

Obszar (D) stanowi więc continuum. Wszystkie punkty obszaru (D), które nie są punktami wewnętrznemi, stanowią *brzeg* albo *ograniczenie* tego obszaru; w dowolnie małem otoczeniu takiego punktu istnieją punkty, nie należące do (D). Do brzegu ograniczenia, obszaru (D) należą więc punkty, należące do odcinka (który może być odcinkiem niewłaści-

wym, czyli punktem); $x=m$, $\varphi_1(m) \leqslant y \leqslant \varphi_2(m)$; punkty krzywej C_1; punkty odcinka $x=n$, $\varphi_1(n) \leqslant y \leqslant \varphi_2(n)$ i wreszcie punkty krzywej C_2. Zbiór wszystkich tych punktów nazwiemy zbiorem (L).

Każdy inny punkt obszaru (D) jest punktem wewnętrznym tego zbioru. Zanim to wykażemy, damy jeszcze określenie pewnego pojęcia, które nam będzie potrzebne. Odległością δ punktu M od zbioru (Z) nazywać będziemy kres dolny zbioru utworzonego z odległości punktu M od poszczególnych punktów zbioru (Z). *Jeżeli zbiór jest domknięty, to istnieje punkt zbioru (Z), którego odległość od M równa się temu właśnie kresowi dolnemu.* Z określenia kresu dolnego wynika, że dla każdego $\varepsilon>0$, można znaleźć przynajmniej jeden taki punkt z zbioru (Z), że $\delta \leqslant d_{Mz} < \delta+\varepsilon$, gdzie d_{Mz} oznacza odległość punktów M i z. Możemy ograniczyć się do przypadku, gdy $\delta < d_{Mz} < \delta+\varepsilon$, gdyż inaczej punkt z byłby właśnie tego punktem, którego istnienie należy wykazać. Nadajmy liczbie ε ciąg wartości $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, takich że $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$; wartościom tym niech odpowiadają punkty $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_p \ldots$ zbioru (Z), spełniające warunek

$$\delta < d_{Mz_p} < \delta+\varepsilon_p;$$

stąd, przechodząc do granicy dla $p\to\infty$, otrzymamy

$$\lim_{p\to\infty} d_{Mz_p} = 0.$$

* Zbiór ograniczony na płaszczyźnie, zawierającej nieskończenie wiele punktów, posiada przynajmniej jeden punkt skupienia. Przypuśćmy, że wszystkie punkty naszego zbioru są zawarte wewnątrz kwadratu A_1. Dzielimy kwadrat A_1 na cztery równe kwadraty i wybieramy z pośród czterech otrzymanych kwadratów kwadrat A_2, zawierający nieskończenie wiele punktów naszego zbioru; łatwo widzieć, że przynajmniej jeden taki kwadrat znaleźć się musi. Postępujemy

Wszystkie punkty $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_p, \ldots$ znajdują się wewnątrz koła o promieniu $\delta + \varepsilon_1$, zakreślonego z punktu M jako ze środka. Na mocy twierdzenia Weierstrassa, które jak łatwo widzieć*, stosuje się i do zbiorów punktów na płaszczyźnie, zbiór ograniczony $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_p, \ldots$ posiada przynajmniej jeden punkt skupienia ζ, który, na mocy zamkniętości zbioru (Z), należy do zbioru (Z). Ponieważ ζ jest punktem skupienia zbioru $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_p, \ldots$ więc można znaleźć z pośród punktów $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_p, \ldots$ zbiór $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_p, \ldots$, stanowiący część poprzedniego, przytem taki, że $\lim\limits_{p \to \infty} \zeta_p = \zeta$*. Ponieważ $\lim\limits_{p \to \infty} d_{Mz_p} = \delta$, a punkty ζ_i są wybrane z pośród punktów $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_p, \ldots$ więc i $\lim\limits_{p \to \infty} d_{M\zeta_p} = \delta$; lecz $\lim\limits_{p \to \infty} d_{M\zeta_p} = d_{M\zeta}$, ponieważ odległość $d_{M\zeta_p}$ punktu M od punktu ζ_p jest funkcją ciągłą spółrzędnych ζ_p; w rzeczy samej $d_{M\zeta_p} = \sqrt{(a - x_p)^2 + (b - y_p)^2}$, gdzie a i b są spółrzędnemi punktu M, a x_p i y_p spółrzędnemi punktu ζ_p;

---

z kwadratem A_2 jak z kwadratem A_1 i otrzymujemy kwadrat A_3, następnie A_4 i t. d. Ciąg ten jest nieskończony: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ Spółrzędne punktów kwadratu A_n czynią zadość warunkom $a_n < x < b_n$; $c_n < y < d_n$; ciągi monotoniczne $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant, \ldots$ i $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots$ dla których $b_n - a_n \to 0$, mają wspólną granicę ξ; tak samo ciągi $c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3 \leqslant \ldots$ i $d_1 \geqslant d_2 \geqslant d_3 \geqslant \ldots$ mają wspólną granicę η. Punkt ξ, η znajduje się wewnątrz wszystkich kwadratów A_n. Punkt o spółrzędnych ξ, η jest więc punktem skupienia.

* Przypuśćmy, że mamy zbiór punktów $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_p, \ldots$ na płaszczyźnie xOy i niech x_p, y_p oznaczają spółrzędne punktu ζ_p. Punkt ζ o spółrzędnych ξ, η jest granicą naszego zbioru, jeżeli do każdego $\rho > 0$, promienia koła, określającego otoczenie punktu ζ, można dobrać taki wskaźnik p_0, że każdy punkt ζ_p o wskaźniku $p > p_0$ należy do owego otoczenia punktu ζ. Wtedy $\lim\limits_{p \to \infty} x_p = \xi$; $\lim\limits_{p \to \infty} y_p = \eta$. Odwrotnie, o ile $\lim\limits_{p \to \infty} x_p = \xi$, $\lim\limits_{p \to \infty} y_p = \eta$, to punkty ζ_p posiadają granicę i tą granicą jest punkt ζ o spółrzędnych ξ i η.

$$\lim_{p\to\infty} d_{M\zeta_p} = \lim_{p\to\infty} \sqrt{(a-x_p)^2+(b-y_p)^2} =$$

$$= \sqrt{(a-\lim_{p\to\infty} x_p)^2+(b-\lim_{p\to\infty} y_p)^2}\,{}^{*} = \sqrt{(a-\xi)^2+(b-\eta)^2} = d_{M\zeta},$$

gdzie ξ i η są spółrzędnemi punktu ζ.

Tak więc punkt ζ jest punktem szukanym; punkt ten należy do (ζ), a odległość jego od punktu M równa się kresowi dolnemu δ.

Stąd wniosek następujący: warunkiem koniecznym i dostatecznym przynależności punktu M do zbioru domkniętego (Z) jest $\delta=0$, gdzie δ oznacza określoną przed chwilą odległość punktu M od zbioru (Z).

Tak samo można określić odległość dwóch zbiorów (Z_1) i (Z_2): jest to kres dolny zbioru odległości wszystkich par punktów, z których jeden należy do (Z_1), a drugi do (Z_2). Jeżeli oba zbiory (Z_1) i (Z_2) są zbiorami zamkniętemi, to istnieje przynajmniej jedna para punktów, z których pierwszy należy do (Z_1), a drugi do (Z_2) i których odległość wzajemna równa się właśnie temu kresowi dolnemu.

Wróćmy teraz do obszaru (D). Określiliśmy pewien zbiór punktów, należący do brzegu (ograniczenia) obszaru (D), mianowicie zbiór (L). Udowodnimy teraz, że każdy inny punkt obszaru (D) jest punktem wewnętrznym, czyli że brzeg (ograniczenie) obszaru (D) nie zawiera innych punktów, prócz punktów, należących do (L). Przedewszystkiem należy udowodnić, że zbiór (L) jest domknięty, dowód jest zupełnie podobny do podanego poprzednio ma domkniętość obszaru (D), tak że możemy pozostawić tę rzecz czytelnikowi. Niech P oznacza dowolny punkt obszaru (D),

---

* $$\sqrt{(a-\xi)^2+(b-\eta)^2} - \sqrt{(a-x_p)^2+(b-y_p)^2} =$$

$$= \frac{(a-\xi)^2+(b-\eta)^2-(a-x_p)^2-(b-y_p)^2}{\sqrt{(a-\xi)^2+(b-\eta)^2}+\sqrt{(a-x_p)^2+(b-y_p)^2}} =$$

$$= \frac{(\xi-x_p)(\xi+x_p-2a)+(\eta-y_p)(\eta+y_p-2b)}{\sqrt{(a-\xi)^2+(b-\eta)^2}+\sqrt{(a-x_p)^2+(b-y_p)^2}}$$

nie należący do (L). Odległość δ punktu P od (L) nie jest równa zeru, gdyż inaczej, t. j. gdyby $\delta = 0$, punkt P, wskutek domkniętosci zbioru (L), należałby, wbrew założeniu, do (L). Zakreślmy z punktu P koło γ, promieniem $\rho < \delta$; na obwodzie koła γ i wewnątrz tego koła niema więc żadnego punktu, należącego do (L); powiadam teraz, że wszystkie punkty koła (γ) należą do (D). Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności. Przypuśćmy, że istnieje w γ punkt ε, nie należący do (D). Ponieważ odcięta x_0 środka koła γ spełnia warunek $m < x_0 < n$, więc o ile ρ dostatecznie małe, spółrzędne x wszystkich punktów tego koła będą spełniały ten sam warunek $m < x < n$, a więc i odcięte punktu ε. Połączmy punkt ε ze środkiem P koła γ; wszystkie punkty tego odcinka $P\varepsilon$ leżą wewnątrz γ. Weźmy teraz pod uwagę funkcje $y - \varphi_1(x)$ i $y - \varphi_2(x)$, jako funkcje dwóch zmiennych; wartości ich zależą od położenia punktu M o spółrzędnych x i y. Gdy punkt M znajduje się na odcinku prostej $P\varepsilon$, y jest funkcją linjową, a więc ciągłą zmiennej x, tak iż $y - \varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x) - y$ stają się funkcjami jednej tylko zmiennej x, $f_1(x) = y - \varphi_1(x)$, $f_2(x) = \varphi_2(x) - y$, przyczem $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są w rozważanym przedziale, (t. j. gdy x zmienia się od wartości odciętej w punkcie P do wartości odciętej w punkcie ε) funkcjami ciągłemi zmiennej x. Ponieważ F jest punktem obszaru (D), nie należącym do (L), funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ w punkcie P mają wartości dodatnie. Ponieważ w punkcie ε odcięta x nie może być ani $\geqslant n$, ani $\leqslant m$, więc z określenia punktu ε, jako nie należącego do (D), wynika, że jedna z dwóch funkcyj $f_1(x)$ lub $f_2(x)$ w punkcie ε ma wartość ujemną. Na mocy ciągłości funkcyj $f_1(x)$ i $f_2(x)$, istnieje wartość pośrednia zmiennej, dla której jedna z dwóch funkcyj $f_1(x)$ lub $f_2(x)$ staje się równą zeru, czyli inaczej, istnieje na odcinku $P\varepsilon$ taki punkt M, iż spółrzędne x i y tego punktu spełniają jedno z dwóch następujących równań $y = \varphi_1(x)$ albo $y = \varphi_2(x)$, ale w takim

razie punkt M, należący do koła γ, jest punktem zbioru (L). Doszliśmy więc do sprzeczności. A więc wszystkie punkty koła γ, stanowiącego otoczenie punktu P, należą do (D), czyli punkt P jest punktem wewnętrznym obszaru (D). Każdy więc punkt (D), nie należący do (L), jest punktem wewnętrznym.

Funkcja dwóch zmiennych, określona w (D), jest ciągła w każdym punkcie obszaru (D). Jasna rzecz, że określenie ciągłości, podane poprzednio, bez żadnej zmiany stosuje się tylko do punktów wewnętrznych obszaru (D). Dla punktów zaś, należących do brzegu (L), nazywać będziemy zbiór punktów, należących jednocześnie do (D) i do koła γ,* zakreślonego dowolnie małym promieniem z punktu P jako ze środka; (a więc z koła γ należy usunąć punkty, nie należące do D).

84. *Własności funkcji ciągłej. Ciągłość jednostajna.* Udowodnimy teraz szereg własności funkcji ciągłej dwóch zmiennych, podobnych do odnośnych własności funkcji jednej zmiennej.

1) *Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągłą w punkcie M i $f(M) \neq 0$, to istnieje otoczenie punktu M takie, że funkcja w każdym punkcie M' tego otoczenia posiada ten sam znak, co w punkcie M.*

2) *Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w (D), gdzie (D) oznacza obszar normalny, któryśmy rozpatrywali w rozdziale poprzednim, to funkcja jest w (D) ograniczona.*

Możemy dowieść tego twierdzenia w sposób analogiczny do sposobu użytego dla funkcji jednej zmiennej. Mianowicie funkcja ciągła w punkcie M jest ograniczona w otoczeniu punktu M. Następnie dowodzimy, że jeżeli funkcja nie jest ograniczona w (D), to istnieje taki punkt

* Mowa tu o obszarze, utworzonym z punktów wewnątrz i na okręgu koła.

P obszaru (D), w którego otoczeniu funkcja nie jest ograniczona. Przy dowodzie należy uwzględnić twierdzenie Weierstrassa dla zbiorów punktów na płaszczyźnie, które to twierdzenie zostało udowodnione w odsyłaczu rozdziału poprzedniego i twierdzenie następujące: jeżeli punkt A jest punktem skupienia zbioru (Z), to można utworzyć ciąg punktów $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k, \ldots$, których granicą jest punkt A; z tego twierdzenia, którego treść wyjaśnia również odsyłacz, korzystaliśmy w artykule poprzednim; dowód tego twierdzenia jest zresztą zupełnie łatwy.

Bieg całego dowodu jest taki. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$, stanowią ciąg liczb dążący do $+\infty$. Wybieramy śród wartości funkcji nie ograniczonej od góry w (D) ciąg wartości rosnący $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_p < \ldots$, przytem taki, że $y_p > A_p$; wartości te nasza funkcja przybiera dajmy na to w punktach $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_p, \ldots$ obszaru (D). Wszystkie te punkty są różne, jest ich nieskończenie wiele, mieszczą się w obszarze skończonym (D), więc (Weierstrass) posiadają punkt skupienia, conajmniej jeden, dajmy na to P, należący, z powodu domkniętości zbioru (D), do (D). Można więc z pośród punktów $M_1, M_2, \ldots, M_p, \ldots$ wybrać ciąg częściowy $N_1, N_2, \ldots, N_p, \ldots$ tak by granicą punktów tego zbioru był punkt P. Weźmy pod uwagę wartości naszej funkcji w punktach $N_1, N_3, N_3, \ldots, N_p, \ldots$ Tworzą one ciąg $f(N_1)$, $f(N_2), f(N_3), \ldots, f(N_p), \ldots$, którego wyrazy wszystkie należą do ciągu $y_1, y_2, \ldots, y_p, \ldots$ Ponieważ $y_p \to \infty$, więc i $f(N_p) \to \infty$. Tak więc nasza funkcja nie jest ograniczona w otoczeniu punktu P, należącego do (D). Lecz, ponieważ $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą w punkcie P, jest to niemożliwe, czyli doszliśmy do sprzeczności. Nasze założenie, polegające natem, że funkcja nie jest ograniczona w (D) nie daje się pogodzić z ciągłością funkcji w (D). Funkcja ciągła w (D), jest więc ograniczona w tym obszarze.

Można także dać inny dowód, bardziej bezpośredni,

który w zasadzie dałby się zastosować również do funkcji jednej zmiennej (radzimy czytelnikowi spróbować). Dowód ten polega na kolejnem dzieleniu na obszary częściowe, naprzyklad na kwadraty; jest to metoda, którą stosowaliśmy przy dowodzie twierdzenia Weierstrassa w przypisku, (patrz artykuł poprzedni).

Niech A_1 oznacza kwadrat, wewnątrz którego mieści się obszar (D). Podzielmy ten kwadrat na cztery kwadraty równe. Jeżeli funkcja nie jest ograniczona w (D), to przynajmniej jeden z czterech wspomnianych kwadratów będzie zawierał obszar, w którym funkcja jest określona, ale nie jest ograniczona. Przypuśćmy, że kwadrat A_2 spełnia ten warunek. Postąpimy z kwadratem A_2 jak z kwadratem A_1. Otrzymamy kwadrat A_3, w którym funkcja nie jest ograniczona, następnie kwadrat A_4 i t. d. Proces tworzenia tych kwadratów jest, oczywiście, nieskończony. Otrzymamy więc ciąg kwadratów $A_1, A_2, \ldots, A_p, \ldots$ Spółrzędne punktów, należących do kwadratu A_p, czynią zadość nierównościom $a_p \leqslant x_p \leqslant b_p$; $c_p \leqslant y_p \leqslant d_p$. Ciągi $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$ i $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots$ są monotoniczne; ponieważ $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$, więc dążą do wspólnej granicy ξ; tak samo $\lim\limits_{p \to \infty} c_p = \lim\limits_{p \to \infty} d_p = \eta$. Liczby ξ i η spełniają więc warunki

$$a_p \leqslant \xi \leqslant b_p \quad c_p \leqslant \eta \leqslant d_p,$$

dla każdej wartości wskaźnika p, co dowodzi, że punkt P o spółrzędnych ξ, η, jest punktem, należących do wszystkich kwadratów A_p. Niech γ oznacza koło o dowolnie małym promieniu, stanowiące otoczenie punktu P. Jeżeli wskaźnik p jest dostatecznie wielki, to kwadrat A_p jest wewnątrz koła γ. Lecz w A_p nasza funkcja $f(x, y)$ nie jest ograniczona. A więc funkcja $f(x, y)$ nie jest ograniczona w otoczeniu punktu P. Lecz punkt P jest punktem,

należącym do (D), gdyż w dowolnie małem otoczeniu punktu P są punkty, należące do (D), a obszar (D) jest domknięty. Udowodniliśmy więc, że, jeżeli $f(x, y)$ nie jest ograniczone w (D), to musi istnieć przynajmniej jeden punkt obszaru (D), w otoczeniu którego funkcja nie jest ograniczona. Dalszy ciąg dowodu już nie przedstawia trudności.

Tak więc, jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w (D), to jest ograniczona w tym obszarze, czyli zbiór wartości tej funkcji jest zbiorem liczbowym ograniczonym. A więc istnieje kres górny i kres dolny wartości funkcji w (D).

3) *Funkcja ciągła w (D), osiąga w (D) swój kres górny K i swój kres dolny k.* Innemi słowy: istnieje w (D) punkt P taki, że $f(P) = K$, przyczem śród wartości funkcji $f(x, y)$ w (D) żadna nie jest większa od K; tak samo, istnieje w (D) punkt Q taki, że $f(Q) = k$, przyczem śród wartości funkcji $f(x, y)$ w (D) żadna nie jest mniejsza od k.

Udowodnimy najpierw, że istnieje w (D) punkt P, w dowolnie małem otoczeniu, którego kresem górnym wartości funkcji jest taż sama liczba K; t. j. jeżeli zakreślimy z punktu P jako ze środka koło γ dowolnie małym promieniem ρ, to kresem górnym zbioru wartości jakie przyjmuje funkcja $f(x, y)$ w γ jest ta sama liczba K, która jest kresem górnym wartości funkcji w (D).

Dowód przez podział kolejny na kwadraty, jak przy dowodzie własności poprzedniej. Przypuśćmy, że kwadrat A_1 zawiera w sobie obszar (D). Łącząc środki przeciwległych boków kwadratu A_1, podzielimy kwadrat A_1 na cztery kwadraty. Dla jednego conajmniej z tych czterech kwadratów kres górny wartości funkcji jest także K; gdy bowiem K_1, K_2, K_3, K_4 oznaczają kresy górne wartości funkcji w każdym z czterech wzmiankowanych kwadratów, to kres górny wartości funkcji w kwadracie początkowym A_1 równa się, oczywiście, największej z liczb

K_1, K_2, K_3, K_4. A więc przynajmniej jedna z tych czterech liczb musi się równać K.

Niech więc A_2 oznacza jeden z czterech kwadratów, w którym kres górny wartości funkcji równa się K. Postąpmy z kwadratem A_2 jak z kwadratem A_1, to jest podzielmy go na cztery części i niech A_3 oznacza ten z czterech kwadratów, na które został rozbity kwadrat A_2, w którym kres górny wartości funkcji równa się znowu K. Otrzymamy w ten sposób nieskończony ciąg kwadratów: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p, \ldots$ z których każdy następny jest czwartą częścią poprzedniego; kresem górnym wartości funkcji w A_p dla każdego p jest K. Tak, jak przy poprzednim dowodzie, wyznaczymy punkt P, który należy do wszystkich kwadratów ciągu $A_1, A_2, \ldots, A_p, \ldots$ Otoczmy punkt P kołem γ o promieniu dowolnie małym ρ. Istnieje taki wskaźnik p, że kwadrat A_p leży wewnątrz koła γ. Kres górny wartości funkcji w A_p jest K, a więc kres górny wartości naszej funkcji w γ musi być także równy K, bo nie może być ani mniejszy ani większy od K.

Tak więc pierwsza część dowodu została przeprowadzona. Udowodnimy teraz, że wartość naszej funkcji ciągłej w P równa się właśnie K. Przedewszystkiem z powodu domkniętości zbioru (D), punkt P należy do (D) przypuśćmy, że wartość funkcji w punkcie P nie równa się K; jest wtedy $f(P) < K$, gdyż nie może być $f(P) > K$, bo inaczej K nie byłby kresem górnym. Oznaczmy wartość funkcji w punkcie P, czyli $f(P)$ dla krótkości przez l; można znaleźć na skutek ciągłości funkcji $f(x, y)$ w punkcie P takie otoczenie punktu P, że wartość funkcji w każdym punkcie M tego otoczenia czyli $f(M)$ różni się od $f(P)$ mniej, niż o ε, czyli

$$l - \varepsilon < f(M) < l + \varepsilon;$$

niech K_1 oznacza liczbę $\frac{1}{2}(K + l)$ i niech $\varepsilon = K_1 - l$, co jest liczbą dodatnią, bo $l < K_1 < K$; tak więc wartość

funkcji $f(x, y)$ w każdym punkcie M, należącym do otoczenia punktu P, byłaby mniejsza od K_1, bo

$$f(M) < l + \varepsilon = l + K_1 - l, \text{ czyli } f(M) < K_1.$$

Kres górny wartości funkcji $f(x, y)$ w otoczeniu punktu P byłby mniejszy od K, wbrew otrzymanemu poprzednio wynikowi. Tak więc $f(P)$ nie może być ani $< K$, ani $> K$, czyli $f(P) = K$, co trzeba było udowodnić.

Taki sam dowód dla kresu dolnego.

4) *Funkcja ciągła w* (D) *jest jednostajnie ciągła w* (D).

Określenie. Funkcja $f(x, y)$ jest *jednostajnie ciągła* w (D), jeżeli do każdej liczby dowolnie małej $\varepsilon > 0$ można dobrać taką liczbę δ, że zachodzi nierówność

$$|f(M) - f(P)| < \varepsilon,$$

o ile tylko odległość punktów M i P, należących do (D), jest mniejsza od δ.

Innemi słowy, funkcja jest jednostajnie ciągła w (D). jeżeli do każdej liczby $\varepsilon > 0$, można dobrać taki odcinek η, że skoro tylko nakreślimy na płaszczyźnie jakikolwiek kwadrat o boku nie większym od η i zawierającym punkty obszaru (D), to oscylacja funkcji w tym kwadracie mniejsza jest od ε.

Udowodnimy naprzód, że jeżeli funkcja jest ciągła w (D), to można podzielić płaszczyznę na kwadraty w ten sposób, że oscylacja funkcji w każdym kwadracie, zawierającym punkty (D), jest mniejsza od ε.

Dowodzimy przy pomocy podziału na kwadraty, że jeżeli nie można utworzyć wspomnianego podziału na kwadraty, tak by w każdym kwadracie oscylacja była mniejsza od ε, to istnieje w (D) punkt P, w dowolnie małem otoczeniu, którego oscylacja funkcji jest nie mniejsza od ε; następnie wykażemy, że to nie da się pogodzić z ciągłością funkcji w punkcie P.

Niech kwadrat A_1 zawiera (D) i przypuśćmy, że nie

można podzielić A_1 na kwadraty, w ten sposób, by oscylacja funkcji w każdym z tych kwadratów była mniejsza od ε. Podzielmy M_1 na cztery równe kwadraty łącząc środki boków przeciwległych. Przynajmniej jeden z otrzymanych czterech kwadratów ma tę samą własność, co A_1, t. j. nie może być podzielony na kwadraty o oscylacji mniejszej od ε; gdyby bowiem wszystkie wspomniane cztery kwadraty dawały się podzielić w ten sposób na kwadraty częściowe, to i kwadrat A_1, miałby, wbrew założeniu, tę samą własność. Niech więc A_2 oznacza kwadrat, będący czwartą częścią kwadratu A_1 i nie dający się podzielić na kwadraty o oscylacji $< \varepsilon$.

Z kwadratem A_2 postąpmy jak z kwadratem A_1, t. j. podzielmy na cztery kwadraty, z pośród których wyróżnimy jeden A_3, posiadający tę samą własność co A_2 i A_1. Z kwadratu A_3 otrzymamy kwadrat A_4 i t. d. Otrzymamy nieskończony ciąg kwadratów. Wnioskujemy więc, jak poprzednio, że istnieje punkt P taki, że, jeżeli z tego punktu zakreślimy koło γ dowolnie małym promieniem ρ, to wszystkie kwadraty A_p zacząwszy od pewnego wskaźnika p_0 mieszczą się wewnątrz koła γ. Stad wniosek, że w dowolnie małem otoczeniu punktu P oscylacja funkcji jest nie mniejsza od ε; gdyby bowiem w pewnem kole γ o promieniu ρ, stanowiącem otoczenie punktu P, oscylacja funkcji była mniejsza od ε, to oscylacja wewnątrz kwadratu A_p, o ile wskaźnik p jest dostatecznie wielki, musiałaby być mniejsza od ε, gdyż A_p dla $p > p_0$ jest częścią obszaru γ. Lecz to nie może zachodzić, ze względu na tę okoliczność, że kwadrat A_p należy do tych, których nie można podzielić na części o oscylacji $< \varepsilon$.

Tak więc istnienie punktu P zostało udowodnione punkt ten ma tę własność, że w dowolnie małem otoczeniu tego punktu można zawsze znaleźć przynajmniej dwa takie punkty M i M', że

(31) $$|f(M)-f(M')|\geqslant\varepsilon;$$

wystarczy w tym celu punkty M i M' tak wybrać, by wartości funkcji w tych punktach równe były kresowi górnemu i dolnemu funkcji w tym otoczeniu, co jest możliwe ze względu na ciągłość funkcji $f(x, y)$.

Lecz wspomniana własność punktu P, który oczywiście należy do (D), nie da się pogodzić z ciągłością funkcji w punkcie P. W rzeczy samej, z ciągłości funkcji w punkcie P wynika, iż istnieje takie otoczenie punktu P, że, skoro tylko punkty M i M' do tego otoczenia należą, to

$$|f(P)-f(M)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|f(P)-f(M')|<\frac{\varepsilon}{2},$$

skąd, znanym sposobem wysnuwamy

$$|f(M)-f(M')|<\varepsilon,$$

wbrew nierówności (31).

Tak więc kwadrat A_1 można podzielić na kwadraty częściowe tak, by oscylacja funkcji w każdym kwadracie była mniejsza od dowolnie małej z góry danej liczby dodatniej. Niech tą liczbą będzie, np. liczba $\frac{\varepsilon}{4}$.

Z pośród kwadratów (q) w liczbie skończonej, stanowiących podział na części kwadratu A_1, (o oscylacji $<\frac{1}{4}\varepsilon$ w każdym kwadracie częściowym), wybierzmy ten, którego bok jest większy od boku pozostałych kwadratów i niech h oznacza długość jego boku. Wykreślmy teraz na płaszczyźnie kwadrat, o boku $\delta=\frac{h}{2}$, dajmy na to kwadrat (a), w zupełnie dowolnem miejscu. Można udowodnić, że kwadrat (a) może mieć punkty wspólne najwyżej z czterema kwadratami (q) i że oscylacja w kwadracie (a) zawsze

jest mniejsza od czterokrotnej oscylacji $\frac{\varepsilon}{4}$ w kwadratach (q) dowód ten nie przedstawia trudności, ale wymaga dość żmudnego rozpatrywania możliwych położeń kwadratu (a) względem sieci kwadratów (q), co zostawiamy czytelnikowi.

Podamy inny dowód, nie przedstawiający podobnej niedogodności. Przypuśćmy, że funkcja $f(x, y)$ nie jest jednostajnie ciągła w (D); to znaczy, że istnieje taka liczba dodatnia, ε_0 dajmy na to, że, jakkolwiek małą jest liczba dodatnia δ, można w (D) znaleźć dwa punkty M i P, takie, że ich odległość $d(M, P)$ mniejsza jest od δ, jednakże

(32) $$|f(M) - f(P)| \geqslant \varepsilon_0;$$

dajmy liczbie δ ciąg wartości $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_k$, zmierzających do 0: do każdej wartości δ_k można dobrać parę punktów M_k i P_k, spełniających warunek (32) i takich, że odległość

$$d(M_k, P_k) < \delta_k.$$

Zbiór punktów $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ jako należących do (D) jest ograniczony i posiada przynajmniej jeden punkt skupienia A; z pomiędzy punktów $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_u, \ldots$ można wybrać ciąg częściowy $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_p, \ldots$ dla którego punkt A jest nie tylko punktem skupienia, ale granicą, t. j. wszystkie punkty N_p począwszy od pewnego wskaźnika należą do otoczenia punktu A. Niech $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_p, \ldots$ oznaczają te z pośród punktów $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$, które odpowiadają punktom $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_p, \ldots$, tak że dla każdego p

$$|f(N_p) - f(Q_p)| \geqslant \varepsilon_0,$$

a jednocześnie

$$\lim_{p \to \infty} d(N_p, Q_p) = 0.$$

Z tego ostatniego warunku wynika, że i „prawie“ wszystkie punkty Q_p, t. j. wszystkie, począwszy od pewnego wskaźnika p_0, leżą w otoczeniu punktu A, czyli, że punkt

A jest także granicą zbioru punktów $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p, \ldots$ Na mocy ciągłości funkcji $f(x, y)$:

$$\lim_{p \to \infty} f(N_p) = f(A); \quad \lim_{p \to \infty} f(Q_p) = f(A),$$

czyli
$$\lim \{f(N_p) - f(Q_p)\} = 0,$$

co jest sprzeczne z nierównością

$$|f(N_p) - f(Q_p)| \geqslant \varepsilon_0,$$

która jest spełniona dla każdej wartości wskaźnika p. A więc przez sprowadzenie do sprzeczności udowodniliśmy twierdzenie o jednostajnej ciągłości.

5) Przechodzimy teraz do *kryterjum* ciągłości. *Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w punkcie M, to do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać takie otoczenie punktu M, że $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$, skoro tylko punkty M_1 i M_2 należą do owego otoczenia*, które rozumiemy tu w znaczeniu szerszem, t. j. M_1 albo M_2 może być właśnie punktem M.

Jeżeli do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać takie otoczenie punktu M, że

$$|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$$

skoro tylko punkty M_1 i M_2 należą do owego otoczenia, które także i tu bierzemy w znaczeniu szerszem (t. j. i sam punkt M zaliczamy do otoczenia), *to funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w punkcie M.*

Te dwa twierdzenia razem wzięte dają nam kryterjum dostateczne i konieczne ciągłości funkcji w punkcie M. Dowód nie przedstawia trudności, ponieważ mamy do czynienia z otoczeniem w szerszem znaczeniu tego słowa, tak że napisane nierówności pozostają w mocy, gdy M_1 zastąpimy przez M.

Gdyby w wysłowieniu poprzedniego kryterjum zwęzić pojęcie otoczenia, przez wykluczenie punktu M, z tego otoczenia, to otrzymamy kryterjum nie ciągłości funkcji w punkcie M, ale kryterjum istnienia granicy funkcji w punkcie M.

Jeżeli funkcja w punkcie M dąży do granicy g, to znaczy, że do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać takie otoczenie punktu M (w postaci, np., koła o promieniu ρ), że skoro tylko punkt M' należy do tego otoczenia, to

$$|f(M') - g| < \frac{\varepsilon}{2};$$

jeżeli i punkt M'' należy do tego otoczenia, to także

$$|f(M'') - g| < \frac{\varepsilon}{2},$$

a z tych dwóch nierówności wynika

$$|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$$

Pierwsza część kryterjum istnienia granicy, wyrażająca warunek konieczny, jest udowodniona.

Przejdźmy do warunku dostatecznego.

Przypuśćmy, że do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę ρ, że skoro tylko punkty N i P należą do otoczenia punktu M, w postaci koła γ o promieniu ρ, to

$$|f(N) - f(P)| < \varepsilon, \tag{33}$$

przyczem otoczenie należy tu rozumieć w znaczeniu właściwem, t. węższem.

Dajmy sobie pewien zbiór punktów $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_p, \ldots$ zmierzających do punktu M i weźmy pod uwagę wartości funkcji $f(x, y)$ w tych punktach, czyli ciąg $f(M_1), f(M_2), f(M_4), \ldots, f(M_p), \ldots$; ciąg ten jest ograniczony, ponieważ „prawie" wszystkie punkty ciągu M_1, $M_2, \ldots, M_p, \ldots$ należą do otoczenia punktu M, wyznaczonego promieniem ρ, a wtedy, na mocy (33)

$$f(M_{p_0}) - \varepsilon < f(M_p) < f(M_{p_0}) + \varepsilon \text{ dla każdego } p \geqslant p_0.$$

Na zasadzie twierdzenia Weierstrassa ciąg nieskończony i ograniczony posiada punkt skupienia, dajmy na to liczbę l; można więc z pośród wyrazów ciągu $f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_p), \ldots$ wybrać ciąg częściowy $f(N_1), f(N_2), \ldots, f(N_p), \ldots$, taki, że $\lim\limits_{p \to \infty} f(N_p) = l$; ponieważ zaś liczby N_p należą do ciągu liczb M_n, więc $\lim\limits_{p \to \infty} N_p = M$. Każdej liczbie dodatniej ε można podporządkować taką liczbę n_0, że skoro tylko $p > n_0$ to punkt N_p leży wewnątrz koła γ o promieniu ρ, stanowiącego otoczenie punktu M. A więc na mocy (33)

$$|f(N_p) - f(P)| < \varepsilon, \tag{34}$$

skoro tylko $p > n_0$ i punkt P leży wewnątrz koła γ; ponieważ $\lim f(N_p) = l$, więc przechodząc w (34) do granicy dla $p \rightarrow \infty$, otrzymamy:

(35) $$|l - f(P)| \leqslant \varepsilon.$$

Tak więc, jakkolwiek małą jest liczba ε, nierówność (35) jest spełniona, skoro tylko P należy do otoczenia γ punktu M (przy odpowiednio dobranem ρ). Oznacza to, że l jest granicą funkcji $f(x, y)$ w punkcie M.

85. *O funkcjach uwikłanych.*

Przypuśćmy, że funkcja $f(x, y)$ jest określona w prostokącie (D) i przypuśćmy że w punkcie M_1 tego prostokąta $f(M_1) > 0$, a w punkcie M_2 wartość funkcji $f(M_2) < 0$. Jeżeli funkcja jest ciągła, to możemy twierdzić, iż istnieją punkty w (D), dla których funkcja $f(x, y)$ przyjmuje wartość zero. Niech a_1, b_1 oznaczają spółrzędne punktu M_1, a_2 i b_2 spółrzędne punktu M_2 i niech $y = \psi(x)$ oznacza dowolną funkcję ciągłą zmiennej x w przedziale (a_1, a_2), przyczem niech $c_1 = \psi(a_1)$, $b_2 = \psi(a_2)$, i niech y zostaje zawarte w granicach, wyznaczonych przez (D), dla wszystkich wartości x tego przedziału (a_1, a_2). Zbiór punktów x, y, wyznaczonych przez warunki

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2$$
$$y = \psi(x),$$

będziemy nazywali krzywą C; wszystkie punkty tej krzywej należą do (D) i krzywa ta przechodzi przez punkty M_1 i M_2. Na krzywej C istnieje przynajmniej jeden punkt M, taki, że $f(M) = 0$; w rzeczy samej, weźmy pod uwagę funkcję jednej zmiennej $F(x)$, którą otrzymamy, nadając dla każdej wartości x w (a_1, a_2) zmiennej y wartość wyznaczoną przez funkcję $y = \psi(x)$, co oznaczać będziemy, pisząc $F(x) = f\{x; \psi(x)\}$; każdy punkt o spółrzędnych $(x, \psi(x))$ dla x w (a_1, a_2) należy do krzywej C. Funkcja $F(x)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x dla każdej wartości x w (a_1, a_2), gdyż dla $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$ $\lim\limits_{x \rightarrow a} F(x) = \lim\limits_{x \rightarrow a} f\{x, \psi(x)\} =$

$=f\left\{\lim_{x\to a} x, \lim_{x\to a}\psi(x)\right\}=f\{a,\psi(a)\}=F(a)$. Ponieważ $F(a_1)>0$, $F(a_2)<0$, istnieje więc przynajmniej jeden punkt ξ, taki, że $F(\xi)=0$, przyczem $a_1\leqslant\xi\leqslant a_2$. Lecz $f\{\xi,\psi(\xi)\}=F(\xi)=0$; czyli $f(x,y)$ przybiera wartość zero, gdy $x=\xi$, $y=\psi(\xi)$; niech M oznacza punkt o spółrzędnych $x=\xi$, $y=\psi(\xi)$, punkt ten leży na krzywej C, z drugiej strony w tym punkcie M mamy $f(M)=0$. Tak więc na każdej krzywej C mamy przynajmniej jeden taki punkt, w którym funkcja równa się zeru. Zwróćmy teraz uwagę, na zbiór punktów M, leżących w (D) i spełniających warunek $f(M)=0$, których istnienie zostało udowodnione; niech ξ i η oznaczają spółrzędne punktu M; liczby te spełniają warunek $f(\xi,\eta)=0$. Zjawia się teraz pytanie, czy zbiór par liczbowych ξ,η stanowi zależność funkcjonalną między obu zmiennemi i czy możemy, np., wartości zmienne η uważać za wartości pewnej funkcji $\varphi(\xi)$ zmiennej niezależnej ξ, określonej przez $f(\xi,\eta)=0$.

Niech, np., $f(x,y)=y^2-2xy+x^2-x$; wtedy zbiór wartości x,y, spełniających warunek $f(x,y)=0$ istnieje tylko dla $x\geqslant 0$ i wtedy dla każdej wartości x mamy dwie wartości na y: $y_1=x+\sqrt{x}$ i $y_2=x-\sqrt{x}$. Tak więc $f(x,y)=0$ w tym przypadku określa nam nie jedną funkcję, ale dwie. Jeżeli od tego prostego przykładu przejdziemy do przypadku ogólnego, to wcale nie jest oczywistem, że zbiór wartości x i y, spełniających warunek $f(x,y)=0$, określa y jako funkcję zmiennej x.

Odpowiedź na postawione pytanie daje nam następujące twierdzenie.

Jeżeli funkcja $f(x,y)$ dwóch zmiennych staje się równą zeru dla $x=a$, $y=b$, t. j. $f(a,b)=0$; jeżeli w otoczeniu punktu $x=a$, $y=b$ funkcja $f(x,y)$ jest funkcją ciągłą i jeżeli dla każdej wartości zmiennej $x=x_0$ w tym otoczeniu funkcja $f(x_0,y)$, jako funkcja jednej tylko zmien-

nej y, jest funkcją rosnącą tej zmiennej (albo funkcją malejącą tej zmiennej), *to w otoczeniu punktu* (a, b), *dla każdej wartości zmiennej x pewnego przedziału* $(a-h, a+h)$, *istnieje jedna tylko wartość zmiennej y, spełniająca równanie*

$$f(x, y)=0$$

tak, iż to równanie określa w danych warunkach pewną funkcję $y=\varphi(x)$ zmiennej x i tylko jedną dla każdej wartości x pewnego przedziału $(a-h, a+h)$. Ta funkcja $y=\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x w przedziale $(a-h, a+h)$.

Oznaczmy przez M punkt o spółrzędnych a, b i niech prostokąt (p), którego środkiem jest punkt M, przedstawia otoczenie tego punktu, dla którego spełnione są nasze założenia.

Gdy $x=a$, $f(a, y)$ jest funkcją rosnącą zmiennej y; jeżeli więc przez punkt M przeprowadzimy (patrz rys. 5) równoległą do osi Oy i na tej równoległej obierzemy dwa punkty A i B po jednej i po drugiej stronie punktu M, tak, by A i B były w (p), to $f(A)>0$, $f(B)<0$; przez punkt A prowadzimy $A_1 A_2$, a przez punkt B prowadzimy $B_1 B_2$, równoległe do osi Ox. Punkt A jest wewnątrz odcinka $A_1 A_2$, a punkt B wewnątrz odcinka $B_1 B_2$, przyczem punkty $A_1 A_2$ i $B_1 B_2$ obieramy na tych równoległych tak, by $A_1 A_2 B_2 B_1$ było prostokątem i tak, by funkcja $f(x, y)$ miała wzdłuż odcinka $A_1 A_2$ ten sam znak, co w punkcie A, to jest dodatni, a na odcinku $B_1 B_2$ ten sam, co w punkcie B, to jest ujemny. Te warunki będą spełnione, o ile odcinek $A_1 A_2=B_1 B_2$ uczynimy dostatecznie mały, na mocy ciągłości funkcji $f(x, y)$ w (p). Prostokąt (p) zastąpmy prostokątem $A_1 A_2 B_2 B_1$, który nazwiemy (q); niech $a-h_1$ i $a+h_2$ oznaczają odcięte punktów A_1 i A_2.

Przeprowadźmy równoległą do osi Oy, przecinającą

odcinek $A_1 A_2$ w punkcie A', a odcinek $B_1 B_2$ w punkcie B'. Funkcja $f(x, y)$ w punkcie A' jest dodatnia, w punkcie B' ma wartość ujemną, na prostej $A' B'$ zmienna x ma wartość stałą x_0, zawartą między $a - h_1$ i $a + h_2$, a zmienia się tylko y, tak że na $A' B'$ wartość funkcji $f(x_0, y)$ rośnie wraz z y. Ponieważ funkcja jest *ciągła*, więc na $A' B'$ musi być *przynajmniej jeden* punkt M' taki, iż $f(M') = 0$. Taki punkt jest *tylko* jeden, bo $f(x_0, y)$ jest funkcją *rosnącą* zmiennej y. Każdej więc wartości x w $(a - h_1, a + h_2)$ odpowiada jedna wartość zmiennej y, spełniająca warunek $f(x, y) = 0$ i zbiór tych wszystkich wartości y określa nam dla x w przedziale $(a - h_1, a + h_2)$ pewną funkcję $y = \varphi(x)$.

Udowodnimy, że funkcja w ten sposób określona $y = \varphi(x)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x w $(a - h_1, a + h_2)$. W tym celu wystarczy udowodnić, że dla każdego ciągu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots$ zmierzającego do granicy x, (przyczem $a - h_1 \leqslant x_n \leqslant a + h_2$), $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$. Przypuśćmy, iż tak nie jest; ciąg $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n), \ldots$ jest ograniczony, ale nie zmierza do granicy $\varphi(x)$, czyli albo nie jest zbieżny, albo posiada granicę nie równą $\varphi(x)$; w jednym i drugim wypadku możemy z pośród wyrazów tego ciągu wybrać ciąg częściowy $\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \ldots, \varphi(\xi_p), \ldots$, który zmierza do granicy $g \neq \varphi(x)$, przyczem odcięte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, \ldots$ stanowią część ciągu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$; tak więc $f\{\xi_p, \varphi(\xi_p)\} = 0$ i $\lim\limits_{p \to \infty} \xi_p = x$. Przejdźmy do granicy dla $p \to \infty$; zważywszy, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągła, otrzymamy

$$0 = \lim_{p \to \infty} f\{\xi_p, \varphi(\xi_p)\} = f\{\lim_{p \to \infty} \xi_p, \lim_{p \to \infty} \varphi(\xi_p)\} = f(x, g),$$

gdyż $\lim\limits_{p \to \infty} \varphi(\xi_p) = g$. Lecz $a - h_1 \leqslant x \leqslant a + h_2$, a w prostokącie (g) na każdej równoległej do Oy jest tylko jeden punkt, spełniający warunek; z równości $f\{x, \varphi(x)\} = f(x, g) = 0$ wynika, że $g = \varphi(x)$; a więc nie może być $g \neq \varphi(x)$, czyli

zawsze $\lim_{n \to \infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim_{n \to \infty} x_n) = \varphi(x)$, co jest wyrazem ciągłości funkcji $y = \varphi(x)$.

Przy stosowaniu tego twierdzenia musimy rozstrzygnąć, czy w otoczeniu punktu $(a\ b)$ funkcja $f(x, y)$ jest przy stałej wartości zmiennej x funkcją rosnącą (malejącą) zmiennej y. W tym celu tworzymy różnicę $\delta = f(x, y) - f(x, y')$ i badamy, czy różnica δ jest tego samego znaku, co różnica $y - y'$; możemy, np., utworzyć iloraz $\frac{f(x, y) - f(x, y')}{y - y'}$; jeżeli w otoczeniu punktu a, b, dajmy na to w prostokącie (p), iloraz ten, przy każdej wartości x, y w (p) jest dodatni, to $f(x, y)$ przy stałym x jest funkcją rosnącą zmiennej y w (p); jeżeli ten iloraz przy każdej wartości x, y w (p) jest ujemny, to $f(x, y)$ przy stałym x jest funkcją malejącą zmiennej y. W tych obu przypadkach, o ile $f(a, b) = 0$ i $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą w (p), możemy twierdzenie o funkcji uwikłanej stosować.

Przypuśćmy, np., że $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^3 + 3y = 0$; $f(x, y) - f(x, y') = (y - y')(3x^2 + y^2 + yy' + y'^2 + 3)$; parą liczb a, b, spełniających równanie $f(x, y) = 0$ może być tutaj $x = 0$, $y = 0$; w otoczeniu tego punktu

$$3x^2 + y^2 + yy' + y'^2 + 3 > 0,$$

a więc istnieje w otoczeniu punktu $x = 0$ funkcja $y = \varphi(x)$, spełniająca nasze równanie i która dla $x = 0$ przybiera wartość $y = 0$; funkcja, spełniająca te warunki jest tylko jedna.

Jeżeli zastosujemy twierdzenie o funkcji uwikłanej do funkcji dwóch zmiennych postaci następującej; $f(y) - x$, w takim razie otrzymamy warunki, przy których równanie $f(y) - x = 0$ określa y jako funkcję $\varphi(x)$ zmiennej x. Otrzymamy wtedy znane nam z poprzedniego (l. 78) twierdzenie o funkcji odwrotnej. W rzeczy samej twierdzenie o funkcji uwikłanej przybiera postać następującą.

Jeżeli funkcja $f(y)$ jest funkcją ciągłą i rosnącą (malejącą) zmiennej y w otoczeniu $y=b$ i jeżeli $f(b)=0$, to istnieje jedna i tylko jedna funkcja ciągła $y=\varphi(x)$ zmiennej x, określona w pewnym przedziale $(a-h, a+h)$, stanowiącym otoczenie punktu a, spełniająca równanie $f(y)=x$ i która dla $x=a$ przyjmuje wartość b.

86. Wyłożone w poprzednich rozdziałach pojęcia i określenia dają się z łatwością rozciągnąć na funkcje wielu zmiennych $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Wysłowienia i nawet często dowody twierdzeń pozostają prawie bez zmiany, o ile używać będziemy terminów ustalonych poprzednio, jak punkt, otoczenie punktu i t. p., tylko że punkt będzie oznaczał teraz układ n liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$; otoczenie punktu $M(x_1^M, x_2^M, \ldots, x_n^M)$ będzie oznaczało zbiór wszystkich punktów analitycznych, czyli układów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, spełniających warunek:

$$|x_1^M - x_1| + |x_2^M - x_2| + \ldots + |x_n^M - x_n| \leqslant \delta,$$

albo warunki:

$$|x_1^M - x_1| \leqslant \delta, \quad |x_2^M - x_2| \leqslant \delta, \ldots, \quad |x_n^M - x_n| \leqslant \delta,$$

gdzie δ może być liczbą dodatnią dowolnie małą.

Granicą wartości funkcji $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, w punkcie $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest liczba g, jeżeli do każdej dowolnie małej liczby $\varepsilon > 0$, można dobrać takie otoczenie punktu M, że dla wszystkich punktów P tego otoczenia (M nie należy do otoczenia) zachodzi nierówność

$$|f(P) - g| < \varepsilon.$$

Jeżeli ta granica g równa się wartości funkcji w punkcie M, czyli, jeżeli $g=f(M)=f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, to funkcja jest ciągła w punkcie M. Wtedy w otoczeniu punktu M

$$|f(P) - f(M)| < \varepsilon,$$

gdzie punkt P należy do otoczenia punktu M. Jeżeli funkcja jest ciągła w punkcie $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, to

$$\lim f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(\lim x_1, \lim x_2, \ldots, \lim x_n = \\ = f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n),$$

gdy zmienne $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *zmierzają odpowiednio do* $a_1, a_2, \ldots, a_n$; *krótko możemy tę samą treść wyrazić w sposób następujący:*

$$\lim_{P \to M} f(P) = f(\lim_{P \to M} P) = (M).$$

Własności funkcji ciągłej, udowodnione dla funkcji jednej i dwóch zmiennych spełnione są i dla funkcji n zmiennych. I tak, jeżeli $f(M) > 0$, to istnieje takie otoczenie punktu M, że w każdym punkcie P tego otoczenia również $f(P) > 0$. Funkcja jest ciągła w obszarze (D) jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego obszaru. Funkcja ciągła w (D), jest ograniczoną w (D), posiada więc kres górny K i dolny k, przyczem osiąga te kresy, t. j. w (D) istnieje punkt N_1 taki, że $f(N_1) = K$, istnieje również conajmniej jeden punkt N_2 taki, że $f(N_2) = k$. Funkcja ciągła w (D) jest jednostajnie ciągła w (D), t. j. do każdej liczby $\varepsilon > 0$, można dobrać taką liczbę δ, że skoro tylko odległość $d(M, N)$ dwóch punktów M i N należących do (D) jest mniejsza od δ, to $|f(M) - f(N)| < \varepsilon$, przyczem

$$d(M, N)^* = \sqrt{(x_1^M - x_1^N)^2 + (x_2^M - x_2^N)^2 + \ldots + (x_n^M - x_n^N)^2}.$$

gdzie $(x_1^M, x_2^M, \ldots, x_n^M)$ i $(x_1^N, x_2^N, \ldots, x_n^N)$ oznaczają spółrzędne punktu M i N.

---

* Czytelnik z łatwością się przekona, że można byłoby wprowadzić zamiast odległości w zwykłem znaczeniu tego słowa na określenie symbolu $d(M, N)$ także, np., następujący

$$|x_1^M - x_1^N| + |x_2^M - x_2^N| + \ldots + |x_n^M - x_n^N|$$

albo inną jakąś funkcję zmiennych

$$x_1^M, x_2^M, \ldots, x_n^M, x_1^N, x_2^N, \ldots, x_n^N,$$

ciągłą względem tych zmiennych i równą zeru tylko dla

$$x_1^M = x_1^N, \quad x_2^M = x_2^N, \ldots, \quad x_n^M = x_n^N.$$

Dowody tych twierdzeń nie różnią się, z wyjątkiem szczegółów drugorzędnych, od dowodów podanych poprzednio dla $n=2$. Tak samo daje się uogólnić twierdzenie o funkcji uwikłanej dla większej liczby zmiennych; w jakim kierunku to wyogólnienie da się przeprowadzić, pokażemy na przykładzie dla $n=3$.

Niech $f(x,y,z)=0$; czy równanie to określa nam zmienną z jako funkcję dwóch zmiennych niezależnych x i y? Odpowiedź daje nam następujące twierdzenie.

Jeżeli $f(a,b,c)=0$; *jeżeli funkcja* $f(x,y,z)$ *jest ciągła w otoczeniu punktu* M *o spółrzędnych* a,b,c; *jeżeli wreszcie w tem otoczeniu punktu* M *dla każdej pary wartości* $x=x_0$, $y=y_0$, *funkcja* $f(x_0,y_0,z)$, *jako funkcja jednej zmiennej* x, *(przy* x_0 i y_0 *stałych), jest funkcją rosnącą (malejącą) zmiennej* z, *to istnieje takie otoczenie* γ *punktu* P *o spółrzędnych* $x=a$, $y=b$, *na płaszczyźnie* xoy, *że każdej parze wartości liczbowej* x,y *w* γ, *odpowiada jedna i jedna tylko wartość* z, *taka że punkt* M' *o spółrzędnych* x,y,z *należy do otoczenia punktu* M, *i taka, że te trzy liczby* x,y,z *spełniają równanie* $f(x,y,z)=0$. *Przytem otrzymana w ten sposób funkcja* $x=\varphi(x,y)$ *dwóch zmiennych* x *i* y, *określona w* γ, *jest w* γ *funkcją ciągłą dwóch zmiennych* x i y. W ogólnym zarysie dowód jest następujący. Niech (p) oznacza prostopadłościan, którego środkiem jest punkt M i który stanowi otoczenie punktu M, w którem to otoczeniu spełnione są założenia naszego twierdzenia. Równoległa do osi Ox przechodząca przez punkt M przebija dwie przeciwległe ściany prostopadłościanu (p) w punktach Q i Q', w których to punktach funkcja $f(x,y,z)$ posiada znaki przeciwne, tak że $f(Q).f(Q')<0$. Niech $ABCD$ i $A'B'C'D'$ oznaczają owe dwie przeciwległe ściany prostopadłościanu (p), których środkami są punkty odpowiednio Q i Q'. Zastępując prostopadłościan niniejszym, w razie potrzeby, możemy przyjąć, iż funkcja $f(x,y,z)$ ma

na całej ścianie $ABCD$ ten sam znak, co i w punkcie Q, a na ścianie $A'B'C'D'$ ten sam znak, co i w punkcie Q'. Niech γ oznacza prostokąt, który jest rzutem (p) na płaszczyznę xOy. Jeżeli przez dowolny punkt γ przeprowadzimy równoległą do Oz, to ta równoległa przetnie ściany $ABCD$ i $A'B'C'D'$ w 2-ch punktach, dajmy na to R i R'. Gdy punkt N znajduje się na odcinku RR', dwie spółrzędne x i y mają wartości stałe x_0 i y_0 a zmieniać się może tylko z. Ponieważ $f(R)$ i $f(R')$ mają znaki przeciwne, więc na odcinku RR' musi być punkt M' taki, że $f(M')=0$ i przytem tylko jeden taki punkt, gdyż $f(x_0, y_0, z)$ jest funkcją rosnącą (malejącą) zmiennej z. W ten sposób każdej parze liczb x_0, y_0 w γ odpowiada jedna tylko wartość z w (p), spełniająca równanie $f(x_0, y_0, z)=0$. W myśl określenia funkcji dwóch zmiennych, możemy powiedzieć, że wyznaczyliśmy pewną funkcję z dwóch zmiennych x i y w γ, którą oznaczać będziemy przez $z=\varphi(x,y)$ i która spełnia warunek $f\{x, y, \varphi(x,y)\}=0$, dla każdej pary wartości x, y w γ.

Funkcja $z=\varphi(x,y)$ jest funkcją ciągłą zmiennych x, y w γ. Niech P oznacza dowolny punkt w γ i niech P_1, $P_2, \ldots, P_n, \ldots$ oznacza ciąg punktów, należących do γ i takich, że $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$. Udowodnimy, jak w przypadku funkcji uwikłanej $f(x,y)=0$, patrz l. 85, że

$$\lim \varphi(P_n) = \varphi(P), \quad \text{czyli}$$

$$\lim \varphi(x_n, y_n) = \varphi(x, y) = z, \quad \text{gdy } \lim x_n = x, \lim y_n = y.$$

Stąd wynika, że do każdej liczby $\varepsilon > 0$, można dobrać takie otoczenie ρ punktu P, że dla każdego punktu P' w tem otoczeniu

$$|\varphi(P) - \varphi(P')| < \varepsilon;$$

gdyby bowiem tak nie było, istniałaby pewna wartość ε_0, taka, że

(36) $$|\varphi(P) - \varphi(P_k)| \geqslant \varepsilon_0,$$

dla pewnego odpowiednio dobranego punktu P_k w dowolnie małem otoczeniu ρ punktu P. Nadając ρ ciąg wartości malejących i zmierzających do zera, otrzymalibyśmy ciąg punktów $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ zmierzających do punktu P, i spełniających dla każdego wskaźnika k nierówność (36), ale wtedy nie mogło by być $\lim_{k \to \infty} \varphi(P_k) = \varphi(P)$, co, jak wiemy, musi mieć miejsce.

Funkcja $z = \varphi(x, y)$ jest więc ciągła w γ. Miejscem geometrycznem punktow (x, y, z), gdzie $z = \varphi(x, y)$, gdy x, y przybierają dowolne wartości w γ, jest pewna powierzchnia albo płat powierzchni, której rzutem na płaszczyznę xOy jest γ. W tym sensie możemy mówić, że równanie $f(x, y, z) = 0$ określa powierzchnię.

Pochodne funkcji jednej i wielu zmiennych.

Pochodna funkcji jednej zmiennej.

87. *Określenie.*

Niech x i $x + h$ oznaczają dwie wartości zmiennej, należące do przedziału, w którym funkcja $y = f(x)$ jest określona i utwórzmy iloraz

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = F(x, h),$$

który nazywać będziemy *ilorazem różnicowym* lub *stosunkiem różnic*, gdyż mianownik h jest różnicą dwóch wartości $x + h$ i x zmiennej niezależnej x; a licznik jest różnicą dwóch wartości funkcji $f(x)$, odpowiadających tym dwom wartościom $x + h$ i x zmiennej niezależnej. Licznik oznaczać będziemy przez $\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$, albo przez $\triangle y$, mianownik przez $\triangle x$, tak iż rozważony stosunek różnic (zwanych czasami przyrostami) możemy napisać także w postaci $\frac{\triangle f(x)}{\triangle x}$ albo $\frac{\triangle y}{\triangle x}$. Symbol $\triangle$ oznacza tu różnicę. Stosunek różnic czyli

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

jest funkcją dwóch zmiennych x i h i jest określona dla wszystkich przez wartości x i h, dla których punkty x i $x+h$ należą do przedziału, w którym funkcja jest określona, z wyjątkiem tych par wartości x, h, w których $h=0$. Jako funkcję dwóch zmiennych, możemy ten iloraz oznaczyć przez $F(x, h)$; o ile ustalimy zmienną x, to $F(x, h)$ będzie funkcją zmiennej h, określoną w otoczeniu punktu $h=0$, ale nie posiadającą określonej wartości w punkcie $h=0$. Pomimo to, jak wiemy, może istnieć granica tej funkcji $F(x, h)$, gdy h dąży do zera. Granica ta, o ile istnieje, nazywa się *pochodną* funkcji $f(x)$ w punkcie x, co dodajemy, gdyż wartość

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

przy stałej wartości x, gdy h zmierza do zera, zależy oczywiście, od wartości stałej, jaką nadaliśmy zmiennej x. Pochodną funkcji $y=f(x)$ w punkie x oznaczamy przez $f'(x)$ albo y'. Gdy granica $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nie istnieje, to może pomimo to, jak wiemy, istnieć granica lewostronna albo prawostronna; w pierwszym przypadku mamy granicę $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, gdy różnica (czyli przyrost) h zmierza do zera z lewej strony, t. j. dla wartości ujemnych różnicy h; w drugim przypadku, mamy granicę $\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$, gdy h zmierza do zera z prawej strony, t. j. dla wartości dodatnich różnicy h. W tym wypadku mówimy, że istnieje pochodna odpowiednio lewostronna albo prawostronna; gdy te pochodne w punkcie x istnieją i są sobie równe, to istnieje pochodna w punkcie x w zwykłem znaczeniu tego słowa.

Przykłady. 1) Pochodna stałej równa się zeru; w rzeczy samej, jeżeli $f(x) = C$, to $\triangle y = f(x+h) - f(x) = C - C = 0$; $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = F(x, h)$, przy każdej wartości x i dla każdego $h \neq 0$ równa się zeru, a więc i $\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ w tym przypadku równa się zeru.

2) Pochodna funkcji linjowej. Jeżeli $y = f(x) = ax + b$, to $\triangle y = f(x+h) - f(x) = a(x+h) + b - (ax+b) = a \,.\, h$ i iloraz różnicowy $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = F(x, h) =$ stałej a, dla każdej wartości x i dla każdego $h \neq 0$; a więc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$.

3) Pochodne lewostronna i prawostronna istnieją, lecz nie są równe. Niech $f(x) = x \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$; $f(0) = 0$. Znaleźć pochodną w punkcie $x = 0$; $f(x)$ jest tu $f(0) = 0$; $f(x+h)$ jest tu $f(h) = h \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{h}$; tak więc

$$F(0, h) = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{h};$$

granica prawostronna $\lim\limits_{h \to +0} \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{h} = \frac{\pi}{2}$; granica lewostronna $\lim \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{h} = -\frac{\pi}{2}$. Tak więc pochodną lewostronną w punkcie $x = 0$ dla naszej funkcji jest $-\frac{\pi}{2}$, a pochodną prawostronną jest $+\frac{\pi}{2}$.

4) Inny przykład tej samej okoliczności. Fukcja $f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$ dla $x \neq 0$; $f(0) = 0$.

Znaleźć pochodną w punkcie $x = 0$.

$F(0, h) = \frac{1}{1 + e^{1/h}}$; lewostronną granicą dla $e^{1/h}$, gdy $h \to 0$ jest zero, a prawostronnie $e^{1/h}$ dąży do $+\infty$; więc $\lim\limits_{h \to +0} F(0, h) = 0$;

$\lim_{h \to -0} F(0, h) = 1$. Pochodna lewostronna naszej funkcji w punkcie $x = 0$ jest równa 1, a prawostronna zeru.

5) Funkcja ciągła może nie mieć pochodnej. Niech $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, dla $x \neq 0$; $f(0) = 0$. Mamy tu $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, czyli $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, co dowodzi, że nasza funkcja jest ciągła w punkcie $= 0$; szukajmy pochodnej w tym punkcie

$$F(0, h) = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin \frac{1}{h};$$

gdy $h \to 0$, $\sin \frac{1}{h}$ nie zmierza do granicy; (niema tu ani granicy lewostronnej, ani prawostronnej).

Funkcja nasza nie posiada pochodnej w punkcie $x = 0$; ani lewostronnej, ani prawostronnej.

88. *Interpretacja geometryczna pochodnej.*

Jaka jest interpretacja ilorazu różnicowego

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}?$$

Niech M i M_1 oznaczają punkty obrazu geometrycznego funkcji $y = f(x)$, odpowiadające wartościom x i $x + h$ zmiennych (patrz rys. 6) i połączmy te dwa punkty prostą MM_1, którą nazywać będziemy sieczną. Szukany iloraz różnicowy równa się $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, stosunkowi różnicy rzędnych do różnicy odciętych siecznej MM_1. Lecz dla prostej stosunek różnicy rzędnych do odpowiadającej różnicy odciętych jest spółczynnikiem kierunkowym tej prostej (siecznej).

Tak więc iloraz różnicowy jest to spółczynnik kierunkowy odpowiedniej siecznej wykresu funkcji.

Pojęcie spółczynnika kierunkowego prostej jest zupełnie elementarne. Poświęcimy mu jednak parę słów. Zauważymy, po pierwsze, że na prostej (wykluczamy proste równoległe do osi Oy) stosunek różnicy rzędnych do odpowiadającej różnicy odciętych jest wielkością stałą, t. j.

nie zależy od położenia pary punktów M i M_1 na prostej, dla których tworzymy ten stosunek; albo inaczej, niech M i M_1, N i N_1 oznaczają dwie pary punktów na tej samej prostej, stosunek różnicy rzędnych do różnicy odciętych dla pary punktów M i M_1 jest taki sam, jak do pary punktów N i N_1. Jeżeli $y=ax+b$ jest równaniem owej prostej, to $\frac{\triangle y}{\triangle x}=a$, czyli rzeczywiście jest wielkością stałą.

Po drugie, wyznaczmy na siecznej pewien zwrot dodatni w kierunku od punktu o odciętej mniejszej, ku punktowi o odciętej większej i przeprowadźmy w kole o promieniu równym jedności dwa promienie równoległe odpowiednio do osi Ox i do owej siecznej tak, by i zwroty (kierunki dodatnie) były zachowane bez zmiany. Oznaczmy przez φ łuk koła trygonometrycznego, wyznaczony przez te dwa promienie; φ jest to kąt (miara teoretyczna), o który trzeba obrócić oś Ox w kierunku dodatnim obrotów, tak, by oś Ox stała się równoległa do siecznej MM_1 i miała ten sam zwrot, o ile ten kąt obrotu jest $<\frac{1}{2}\pi$; o ile zaś ten kąt obrotu większy jest* od $\frac{3}{2}\pi$, to φ oznaczać będzie kąt równy temu kątowi obrotu mniej 2π; w ten sposób określony kąt φ spełniać będzie warunek

$$-\tfrac{1}{2}\pi<\varphi<\tfrac{1}{2}\pi;\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{\triangle y}{\triangle x},$$

a więc

$$\varphi=\operatorname{Arc\,tg}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\operatorname{Arc\,tg}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Wartość funkcji Arcus tangens z ilorazu różnicowego, czyli $\operatorname{Arc\,tg} F(x,h)$ równa się więc kątowi φ, który tworzy

---

* Łatwo sprawdzić, że kąt obrotu, o którym tu mowa, nie może mieć wartości, należącej do podziału $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$. Sieczna równoległa do Oy jest wykluczona.

sieczna, łącząca punkty wykresu o odciętych x i $x+h$, $(h>0)$.

Przejdźmy teraz do interpretacji geometrycznej pochodnej.

Pochodna $f'(x)$ jest *granicą ilorazu różnicowego*, czyli spółczynnika kierunkowego siecznej, przechodzącego przez punkt stały M, o odciętej x, i przez punkt zmienny M_1, odciętej $x+h$, gdy zmienna h dąży do zera.

Przeprowadźmy przez punkt M prostą MT o spółczynniku kierunkowym równym owej granicy $f'(x)$, czyli prostą, tworzącą z osią Ox kąt $\alpha = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} f'(x)$ Prosta ta MT jest to położenie graniczne siecznej MM_1, dla $h=0$; taką prostą będziemy nazywać styczną do krzywej, czyli do obrazu geometrycznego funkcji $y=f(x)$, w punkcie M, o odciętej x.

A więc, pochodna w punkcie x, czyli $f'(x)$, równa się spółczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu funkcji $y=f(x)$ w punkcie o odciętej x.

Zastanówmy się bliżej nad tem położeniem granicznem siecznej. Odległość punktu M_1 od punktu M, $d(M, M_1) = \sqrt{h^2 + \{f(x+h) - f(x)\}^2} \leqslant |h| + |f(x+h) - f(x)|$; lecz $d(M, M_1) \geqslant |h|$, t. j.

(37) $$|h| \leqslant d(M, M_1) \leqslant |h| + |f(x+h) - f(x)|;$$

gdy $a \to 0$, a funkcja jest ciągła w punkcie x, to i różnica $f(x+h) - f(x)$ dąży do zera, a więc na mocy (37), odległość $d(M, M_1)$ zmierza do zera; odwrotnie, jeżeli $d(M, M_1)$ zmierza do zera, to z (37) wynika, że także $h \to 0$.

Tak więc punkt zmienny M_1 dąży do punktu M wtedy i tylko wtedy, gdy $h \to 0$.

Tak więc wzór:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

możemy interpretować geometrycznie w sposób następu-

jący: Gdy punkt M_1 wykresu zmierza do punktu M, to spółczynnik kierunkowy siecznej MM_1 zmierza do spółczynnika kierunkowego prostej MT; albo inaczej, gdy M_1 dąży do M, to kąt M_1MT dąży do zera.

Tak więc MT jest istotnie położeniem granicznem siecznej. Jeżeli w punkcie x pochodnej niema w znaczeniu zwykłem tego słowa, lecz jeżeli istnieją pochodne: lewostronna i prawostronna, to możemy przeprowadzić dwie proste MT_1 i MT_2, których spółczynniki kierunkowe równają się odpowiednio do granicy lewostronnej i granicy prawostronnej stosunku różnicowego

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

przyczem prosta MT_1 jest granicznem położeniem siecznych, gdy punkt M_1 z lewej strony zbliża się do punktu M, a prosta MT_2 jest położeniem granicznem siecznej MM_1, gdy punkt M_1 zbliża się do M z prawej strony. Krzywa posiada w tym przypadku dwie styczne, jedną lewostronną, drugą prawostronną. Okoliczność ta zachodzi, np., w punkcie $x=0$ dla krzywej, określonej przez: $f(0)=0$, zaś dla $x \neq 0$, $y=f(x)=\frac{2x}{2-e^{1/x}}$; prawostronną styczną jest tu oś Ox, lewostronną styczną dwusieczna $y=x$; krzywa tworzy w punkcie 0 jakgdyby kąt rozwarty ($\frac{3}{4}\pi$).

Może się zdarzyć, że położenie graniczne siecznej istnieje nawet wtedy, gdy pochodnej w punkcie M niema, t. j. gdy nie istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; ma to miejsce wtedy, gdy stosunek $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ dąży do $+\infty$, albo do $-\infty$. Przeprowadźmy w tym przypadku przez punkt M prostą MT, równoległą do osi Oy. Prosta ta będzie położeniem granicznem siecznej MM_1, gdy punkt M_1 dąży do punktu M, a więc będzie styczną.

Można i tu rozróżnić styczną lewostronną i styczną prawostronną; może np., się zdarzyć, że $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$ z jednej strony, a do granicy skończonej z drugiej.

Weźmy dla przykładu funkcję $y=+\sqrt{x}$; w punkcie $x=0$ stosunek różnicowy $=\frac{\sqrt{h}-0}{h}=\frac{1}{+\sqrt{h}}$; h musi być >0; gdy h prawostronnie dąży do zera, to $\frac{1}{\sqrt{h}}$ zmierza do $+\infty$; ponieważ $\frac{1}{\sqrt{h}}$ wyraża spółczynnik kierunkowy siecznych, przechodzących przez punkt początkowy $x=0$, $y=0$ i przez punkt M_1, o spółrzędnych $x=h$, $y=+\sqrt{h}$, więc widzimy, że ten spółczynnik kierunkowy dąży do $+\infty$, gdy punkt M_1 zmierza ku punktowi O. Styczna w punkcie O jest więc równoległa do osi Oy. Gdybyśmy wzięli pod uwagę funkcję $y=\sqrt{-x}$, doszlibyśmy do tego samego wyniku, z tą tylko różnicą, że wchodziło by tu w grę otoczenie lewostronne.

Niech $y=f(x)=\frac{x^{2/3}e^{1/x}}{e^{1/x}+1}$ dla $x\neq 0$; $f(0)=0$. Funkcja jest ciągła w punkcie $x=0$. Przejdźmy do pochodnej w tym punkcie; $F(0,h)=\frac{e^{1/h}}{h^{1/3}(e^{1/h}+1)}$; gdy $h\to 0$ z prawej strony, t. j. dla $h>0$, stosunek różnicowy $F(0,h)$ dąży do $+\infty$; gdy $h\to 0$ z lewej strony (t. j. dla $h<0$), iloraz różnicowy $F(0,h)$ zmierza do zera; tak więc w punkcie początkowym spółrzędnych styczną prawostronną jest oś Oy, a styczną z lewej strony jest oś Ox.

89. Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w jakimś punkcie *pochodną*, to musi być *ciągłą* w tym punkcie. W rzeczy samej, niech $f'(x)$ oznacza pochodną w punkcie x; jest więc $\lim F(x,h)=f'(x)$, czyli do każdej liczby dodatniej $\varepsilon_0>0$ można dobrać taką liczbę δ, że skoro tylko $0<|h|\leqslant\delta$, to

$$|F(x,h)-f'(x)|<\varepsilon_0, \text{ t. j.}$$

$$f'(x) - \varepsilon_0 < F(x, h) < f'(x) + \varepsilon_0; \text{ lecz}$$

$$F(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$|F(x, h)| = \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|}$$

$$\frac{|F(x+h) - f(x)|}{|h|} < |f'(x)| + \varepsilon_0$$

$$|f(x+h) - f(x)| < |h| \,.\, \{|f'(x)| + \varepsilon_0\} < \delta \,.\, M;$$

jeżeli $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$, to $|h| < \delta$, pociąga:

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon,$$

co dowodzi ciągłości funkcji w punkcie x.

Stąd możemy wysnuć wniosek, że punkt nieciągłości funkcji musi być punktem nieciągłości pochodnej. Jeżeli, np., $f(x)$ jest funkcją nieciągłą w punkcie $x = x_0$, lecz jest ciągła i posiada pochodną $f'(x)$ w każdym punkcie pewnego otoczenia punktu x_0, to ta pochodna nie istnieje w punkcie $x = x_0$, wskutek czego punkt ten jest punktem nieciągłości funkcji $f'(x)$.

Tymczasem pochodna może być nieciągła w punkcie $x = x_0$, gdy sama funkcja jest w tym punkcie ciągła; okoliczność zachodzi dla funkcyj, które podaliśmy jako przykład funkcyj, których wykres posiada w danym punkcie styczną równoległą do Oy, jak np. $y = x^{2/3}$.

Udowodniliśmy przed chwilą, że tylko funkcja ciągła w punkcie, może mieć w tym punkcie pochodną. Teraz pozostaje pytanie, czy każda funkcja, ciągła w punkcie danym, posiada w tym punkcie pochodną, t. j. czy ciągłość funkcji w punkcie pociąga za sobą istnienie pochodnej w tym punkcie. Otóż przykłady, któreśmy podali (patrz. l. 87) poprzednio, świadczą, iż ciągłość nie pociąga istnienia pochodnej; wystarczy przypomnieć sobie przykład funkcji: $y = x \sin \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$, $y = 0$ dla $x = 0$; tu funkcja

jest ciągła w punkcie $x=0$, ale nie posiada pochodnej. Można iść dalej i zapytać się, czy może istnieć funkcja, ciągła w przedziale (m, n) i nie posiadająca pochodnej w żadnym punkcie tego przedziału, okazuje się, że tak może być istotnie, gdyż znane są obecnie przykłady funkcyj, ciągłych w przedziale i nie posiadających pochodnej w żadnym punkcie tego przedziału*.

Ciekawą jest rzeczą, że dłuższy czas powszechnie mniemano, iż każda funkcja ciągła w przedziale, musi posiadać pochodną, że nie może istnieć funkcja ciągła, dla której nie istnieje wcale funkcja pochodna. Mniemanie to oparte było na tak zwanej intuicji geometrycznej, z której jakoby ma wynikać, że wszelka krzywa ciągła posiada styczną w każdym punkcie. Mniemanie to okazało się błędnem; stąd też wniosek, że należy zaniechać dowodów, opartych na intuicji geometrycznej. Nie należy mieszać dowodzeń, opartych na intuicji geometrycznej, z tem, co nazywaliśmy interpretacją geometryczną dowodu analitycznego. Dowód geometryczny może być tak samo ścisły, jak analityczny; jeżeli w tym dowodzie *geometryczną* jest tylko *forma;* w tym przypadku każdemu utworowi geometrycznemu odpowiada pewien zbiór liczb, każdej zależności geometrycznej odpowiada zależność między liczbami odpowiednich zbiorów liczb, tak że całą treść dowodu można przełożyć na język analityczny, a więc dowód geometryczny tego rodzaju w istotnej swej treści nie różni się od dowodu analitycznego. W ten sposób zostaje wyjaśnione pytanie, o ile

* Pierwszy przykład takiej funkcji dał Weierstrass, już w r. 1861, ogłosił zaś drukiem dopiero w „Journal für Math.“ t. 79 w 1875 r. Przykład W. nie posiada nigdzie pochodnej, jednak posiada punkty, gdzie granice lewo i prawostronne są $+\infty$ lub $-\infty$. W. Sierpiński podał w pracy „O dwóch zagadnieniach z teorji funkcji nierozróżniczkowalnych“ (Spraw. Akad. Um. Kraków 1614) przykład, dla którego nawet i to już nie ma miejsca.

mamy prawo przy dowodzie prawd analitycznych posługiwać się rozważaniami natury geometrycznej.

Należy zauważyć jeszcze, że pochodna $f'(x)$ może istnieć w każdym punkcie pewnego przedziału, ale nie być ciągłą dla niektórych punktów tego przedziału. Z tego więc, że $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ nie istnieje, nie można wcale wnioskować, iż nie istnieje pochodna $f'(x_0)$. Weźmy dla przykładu funkcję $f(x)$ określoną w sposób następujący

$$y = f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x},$$

dla $x \neq 0$; $y = 0$, dla $x = 0$, czyli $f(0) = 0$. Ta funkcja jest ciągła w punkcie $x = 0$, pozatem posiada w tym punkcie i pochodną, bo iloraz różnicowy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ w tym przypadku jest $F(0, h) = h \sin\frac{1}{h}$, granica tego stosunku istnieje i równa się zeru; tak więc $f'(0) = 0$. Istnieje również pochodna i w każdym innym punkcie i ta pochodna $f(x)$ równa się $2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$. A więc pochodna jest funkcją $f'(x)$ określoną w sposób następujący: $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, dla $x \neq 0$, i $f'(0) = 0$; zauważmy teraz, że $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ nie dąży do granicy, gdy $x \to 0$, nie posiada nawet granicy ani lewostronnej ani prawostronnej w punkcie $x = 0$, gdy tymczasem wartość naszej funkcji w tym punkcie jest oznaczona, bo $f'(0) = 0$. Widzimy stąd, że pochodna jest funkcją, nieciągłą w punkcie $x = 0$. Pochodzi to stąd, jak widać z wykresu, że odpowiadająca krzywa tworzy nieskończenie wiele fal w otoczeniu punktu $x = 0$, których wysokość zmierza do zera, ale spadzistość, którą mierzymy spółczynnikiem kierunkowym stycznej w każdym punkcie różnym od $x =$ nie zmierza do zera, gdy zbliżamy się nieograniczenie do punktu początkowego. Podamy jeszcze szereg przykładów, których poznanie wyświetlić może poruszone w tym ustępie właściwości pochodnej.

1) Niech $y = f(x) = E(x)$; funkcja ta jest określona dla każdej wartości zmiennej x; funkcja jest ciągła, z wyjątkiem punktów, których odcięta x równa się liczbie całkowitej, t. j. $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ i t. d.; w każdym z tych punktów granica prawostronna równa się wartości funkcji, a granica lewostronna jest o jeden mniejsza. Pochodna istnieje w każdym punkcie, z wyjątkiem punktów nie-

ciągłości funkcji i równa się, tam gdzie istnieje, zeru; pochodna prawostronna istnieje nawet w punktach o odciętej x całkowitej (i równa się zeru); lewostronna pochodna w tych punktach nie istnieje, gdyż dla $-1<h<0$, w punkcie $x=n$,

$$\triangle y = f(n+h) - f(n) = E(n+h) - E(n) = -1;$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = F(n, h) = -\frac{1}{h}$$ i stosunek różnicowy dąży do $-\infty$

Czytelnik zbada w ten sam sposób funkcję $f(x) = x - E(x)$.

90. *Znakowanie Leibniza; różniczka.*

Iloczyn pochodnej $f'(x)$ przez przyrost zmiennej niezależnej h nazywać będziemy *różniczką* funkcji i oznaczymy za Leibnizem przez $df(x)$ albo dy, tak iż

(37) $$df(x) = f'(x) \, . \, h;$$

przyrost zmiennej niezależnej h będziemy uważali za liczbę dowolną, lecz ustaloną raz na zawsze; jeżeli teraz uczynimy $f(x) = x$, to, jak wiemy (patrz l. 87, przykład drugi), $f'(x) = 1$, tak że, zgodnie z (37),

$$dx = h;$$

możemy więc (37) napisać w postaci

$$df(x) = f'(x) \, . \, dx,$$

a więc $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ albo $\dfrac{dy}{dx}$. Przy tym sposobie znakowania, pochodna jest ilorazem dwóch różniczek, różniczki dy funkcji i różniczki dx zmiennej niezależnej. Widzimy dalej, że utworzenie pochodnej funkcji i znalezienie jej różniczki, jest to, co do istoty rzeczy, jedna i ta sama czynność, którą nazywamy *różniczkowaniem*.

Należy zauważyć, iż $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{dy}{dx}$, ale błędem byłoby sądzić, że różniczka $dy = \lim \triangle y$, a różniczka $dx = \lim \triangle x$, gdyż te granice są zerami; pochodna istotnie jest granicą ilorazu, ale w tym przypadku nie mamy prawa przyrównać granicy ilorazu do ilorazu granic licznika i mianownika odpowiednio, gdyż takie postępowanie jest

uzasadnione, jak wiemy (patrz l. 28) wtedy i tylko wtedy, gdy granicą mianownika nie jest zero; tymczasem w tym przypadku jest właśnie $\lim \triangle x = 0$. Jeżeli więc, idąc za Leibnizem, możemy pochodną przedstawić w postaci ilorazu, to przyczyna tego tkwi zupełnie w czem innem, mianowicie w tem, że każdą liczbę α możemy przedstawić w postaci ilorazu, np., $\alpha = \frac{\alpha h}{h}$.

Interpretacja geometryczna różniczki $df(x)$ jest bardzo prosta. Przeprowadźmy styczną do krzywej $y = f(x)$ w punkcie M o odciętej x, (patrz rys. 7), i niech MT będzie tą styczną; dajmy zmiennej x przyrost $h = dx$ i niech M_1 oznacza punkt krzywej o odciętej $x + h$. Równoległa do Ox i styczna MT niech przecinają odciętą $M_1 P_1$ odpowiednio w punktach R i Q; odcinek RQ równa się MR razy spółczynnik kierunkowy stycznej, czyli $f'(x) . h = df(x)$; odcinek zaś RM_1, czyli przyrost rzędnej naszej krzywej $=$ $= f(x + h) - f(x)$.

Widzimy stąd, że $df(x)$ jest przyrostem rzędnej, odpowiadającym przyrostowi h zmiennej niezależnej, przy przejściu od punktu M do punktu Q na stycznej do krzywej w punkcie M; albo inaczej $df(x)$ jest przyrostem funkcji linjowej $\gamma = f'(x) X + b$, o spółczynniku kierunkowym równym $f'(x)$, przyrostem γ, odpowiadającym przyrostowi h zmiennej niezależnej X.

Tak więc, różniczka nie jest ani przyrostem $\triangle y$ funkcji $f(x)$, odpowiadającym przyrostowi h zmiennej niezależnej x, ani granicą tego przyrostu dla $h \to 0$. Różniczka jest przyrostem rzędnej, odpowiadającym przyrostowi h zmiennej niezależnej, ale nie rzędnej samej krzywej $y = f(x)$, lecz przyrostem rzędnej linji prostej, stycznej do krzywej w punkcie M.

91. *Pochodna sumy, iloczynu, ilorazu dwóch funkcyj. Pochodna sumy dwóch funkcyj równa się sumie po-*

chodnych funkcyj (będących składnikami sumy), o ile składniki posiadają pochodną.

Twierdzenie to stosuje się do sumy dowolnej liczby funkcji, z tem jedynem zastrzeżeniem, że ta liczba składników jest skończona.

Niech $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$;

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = f'_1(x).$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = f'_2(x);$$

dodając stronami i pamiętając, że granica sumy równa się sumie granic, otrzymamy

$$\lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} \right\} = f'_1(x) + f'_2(x),$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\{f_1(x+h) + f_2(x+h)\} - \{f_1(x) + f_2(x)\}}{h} = f'_1(x) + f'_2(x);$$

lewa strona otrzymanej równości jest to $F'(x)$, gdyż

$F'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$; tak więc

$$F'(x) = f'_1(x) + f'_2(x). \tag{38}$$

W znakowaniu różniczkowem wzór (38) przyjmuje postać:

$$d\{f_1(x) + f_2(x)\} = df_1(x) + df_2(x).$$

Niech $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_n(x)$ oznaczają n funkcyj, których pochodnemi są $u'_1(x)$, $u'_2(x), \ldots, u'_n(x)$. Niech

$$y = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x);$$

wtedy $\quad y' = u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots + u'_n(x);$

przy znakowaniu różniczkowem możemy napisać

$$d(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = du_1 + du_2 + \ldots + du_n. \tag{38'}$$

Pochodna iloczynu.

Jeżeli $u = f_1(x)$, $v = f_2(x)$, $uv = F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, to $F'(x) = f_1(x) . f'_2(x) + f'_1(x) . f_2(x)$, czyli w znakowaniu różniczkowem.

(39) $$d(u\,.\,v) = u\,dv + v\,du.$$

Zakładamy, oczywiście, że pochodne $f'_1(x)$ i $f'_2(x)$ istnieją.

Dowód.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f_1(x) \cdot \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} +$$
$$+ f_2(x) \cdot \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} +$$
$$+ \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} \cdot \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} \cdot h;$$

przechodząc do granicy, otrzymamy

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f_1(x)\,f'_2(x) + f_2(x)\,.\,f'_1(x).$$

Uwaga. Niech jeden z czynników, np., $v = f_2(x)$ równa się stałej a, wówczas $dv = 0$ i z (39) wynika

(39') $$d(au) = a\,.\,du.$$

W przypadku szczególnym, gdy $a = -1$, wzór (40) daje

$$d(-u) = -du,$$

co oczywiście można było otrzymać bezpośrednio. Dalej $d(u - v) = d[u + (-v)] = du + d(-v) = du - dv$; jest to wzór na różniczkę (a więc i na pochodną) różnicy dwóch funkcyj, wzór który można z łatwością otrzymać drogą bezpośrednią.

Pochodna funkcji $\dfrac{1}{f(x)}$,

Jeżeli $F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$; jeśli $u = f(x)$ posiada pochodną w punkcie x i jeżeli $f(x) \neq 0$, to $F'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$. Ponieważ funkcja $f(x)$, na mocy założenia nie równa się zeru w punkcie x, a $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$, gdyż z założenia istnienia pochodnej wynika ciągłość funkcji, ponieważ dalej $x + h$ należy do otoczenia punktu x, więc $f(x+h) \neq 0$;

(możemy przyjąć, iż $|h|$ jest dostatecznie małe, by temu ostatniemu warunkowi stało się zadość).

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}\right\}=-\frac{f(x+h)-f(x)}{hf(x+h)f(x)}=$$

$$=-\frac{\triangle f(x)}{\triangle x}\cdot\frac{1}{f(x)f(x+h)},\quad \text{gdzie } \frac{\triangle f(x)}{\triangle x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

Przechodząc do granicy otrzymamy:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{\triangle f(x)}{\triangle x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(x)\,.\,f(x+h)}=-f'(x)\,.\,\frac{1}{f^2(x)},$$

gdyż $\lim f(x+h)=f(x)$.

Otrzymaliśmy więc żądany wzór, któremu można nadać postać

(40) $$d\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{du}{u^2}.$$

Pochodna ilorazu dwóch funkcyj.

Niech $F(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$; jeżeli $f_2(x)\neq 0$ i jeżeli funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ posiadają pochodne w punkcie x, to $F(x)$ też posiada pochodną w punkcie x i ta pochodna

$$F'(x)=\frac{f'_1(x)f_2(x)-f'_2(x)\,.\,f_1(x)}{f_2^2(x)}.$$

By wynik ten uzasadnić, wystarczy zauważyć, że $F(x)$ jest iloczynem funkcji $f_1(x)$ przez funkcję $\frac{1}{f_2(x)}$, a więc stosując wyniki poprzednio otrzymane,

$$F'(x)=f'_1(x)\cdot\frac{1}{f_2(x)}-f_1(x)\cdot\frac{f'_2(x)}{f_2^2(x)}=\frac{f'_1(x)\cdot f_2(x)-f_1(x)\cdot f'_2(x)}{f_2^2(x)}.$$

Stosując znakowanie różniczkowe, i kładąc $u=f_1(x)$, $=f_2(x)$, możemy napisać

(41) $$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{udv-vdu}{v^2}.$$

Pochodna iloczynu n funkcji i pochodna n^{tej} potęgi funkcji dla wykładnika n całkowitego dodatniego.

Niech $y = u_1(x).(u_2)(x)....u_n(x)$; stosując n-krotnie wzór (39), otrzymamy

(42) $dy = u_2 u_3 ... u_n du_1 = u_1 u_3 ... u_n du_2 + ... + u_1 u_2 ... u_{n-1} du_n$

co możemy uzasadnić drogą indukcji matematycznej; przypuśćmy, że wzór jest spełniony dla $n = k$; gdy $n = k + 1$, mamy $y = z . u_{k+1}(x)$, gdzie $z = u_1(x) . u_2(x) .. u_k(x)$. Dalej $dy = z du_{k+1} + u_{k+1} dz$; lecz $dz = u_2 . u_3 ... u_k du_1 + u_1 u_3 ... u_k du_2 + ... + u_1 u_2 ... u_{k-1} du_k$, więc $dy = u_2 u_3 ... u_{k+1} du_1 + + u_1 u_3 ... u_{k+1} du_2 + ... + u_1 u_2 ... u_{k-1} u_{k+1} du_k + u_1 . u_2 ... ... u_k . du_{k+1}$.

Gdyby $u_1, ... u_n$ były $\neq 0$, to moglibyśmy napisać (42) w bardziej przejrzystej postaci:

$$(42') \qquad dy = \frac{y}{u_1} du_1 + \frac{y}{u_2} du_2 + ... + \frac{y}{u_n} du_n,$$

Jeżeli teraz $u_1(x) = u_2(x) = ... = u_n(x) = u(x)$, to (42) daje nam

$$(43) \qquad d(u^n) = n u^{n-1} du,$$

gdyż w tym przypadku $y = u^n$.

92. *Pochodna funkcji wymiernej.*

Jeżeli funkcja $u(x) = x$, to (43) daje nam

$$(44) \qquad d(x^n) = n x^{n-1}, \text{ albo } \frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1};$$

czyli pochodną funkcji x^n przy n całkowitem i > 0 jest $n x^{n-1}$.

Jesteśmy teraz w możności tworzyć pochodną każdego wielomianu względem zmiennej niezależnej x, czyli każdej funkcji wymiernej całkowitej.

W rzeczy samej, funkcja taka $P(x)$ jest sumą wyrazów kształtu ax^n. Stosując (39') i (44),

$$d(ax^n) = anx^{n-1};$$

jeżeli więc $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, $dP(x) = a_0 n x^{n-1} dx + a_1 (n-1) x^{n-2} dx + a_2 (n-2) x^{n-3} dx + \ldots$ $\ldots + a_{n-1} dx$; albo pochodna $P'(x) = \frac{dP(x)}{dx} = a_0 n x^{n-1} +$ $+ a_1 (n-1) x^{n-2} + a_2 (n-2) x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}$; widzimy stąd, że pochodna funkcji całkowitej wymiernej n^{go} stopnia jest funkcją całkowitą wymierną $n - 1^{go}$ stopnia.

Przejdźmy teraz do najogólniejszej funkcji wymiernej. Taka funkcja jest ilorazem dwóch funkcyj całkowitych wymiernych $P(x)$ i $Q(x)$, gdzie

$$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m;$$

kładąc $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, otrzymamy, zakładając $Q(x) \neq 0$,

$$R'(x) = \frac{P'(x) \,.\, Q(x) - Q'(x) P(x)}{Q^2(x)};$$

widzimy stąd, że pochodna funkcji wymiernej jest także funkcją wymierną.

93. *Pochodna funkcyj trygonometrycznych i hiperbolicznych.*

Wyniki, które otrzymamy, oparte są na wzorach, wyrażających wartość funkcyj trygonometrycznych i hiperbolicznych w punkcie $x_1 + x_2$ w zależności od wartości tychże funkcyj w punktach x_1 i x_2, i na wzorach

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 0; \quad \lim_{h \to 0} \frac{Sh\, h}{h} = 0.$$

Przypuśćmy, że $\varphi(u)$ i $\psi(u)$ są to dwie funkcje, ciągłe (dla każdej wartości zmiennej u) i że dla każdego u i v, spełniają równania funkcyjne:

$$\varphi(u) - \varphi(v) = \pm 2 \psi\left(\frac{u+v}{2}\right) \psi\left(\frac{u-v}{2}\right),$$

$$\psi(u)-\psi(v)=2\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right).\psi\left(\frac{u-v}{2}\right);$$

załóżmy również, że $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\psi(h)}{h}=1$.

Wtedy pochodną funkcji $\varphi(x)$ jest $+\psi(x)$ albo $-\psi(x)$, a pochodną funkcji $\psi(x)$ jest funkcja $\varphi(x)$.

W rzeczy samej, niech $u=x+h$, $h=x$;

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\pm 2\psi\left(x+\frac{h}{2}\right).\psi\left(\frac{h}{2}\right),$$

$$\psi(x+h)-\psi(x)=2\varphi\left(x+\frac{h}{2}\right)\psi\left(\frac{h}{2}\right);\text{ więc}$$

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\pm\psi\left(x+\frac{h}{2}\right).\frac{\psi\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2};$$

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}=\varphi\left(x+\frac{h}{2}\right).\frac{\psi\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2};$$

przechodząc do granicy;

$$\varphi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\pm\lim\psi\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\psi\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2}=\pm\psi(x);$$

$$\psi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\varphi\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\psi\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2}=\varphi(x).$$

Funkcje trygonometryczne i hiperboliczne spełniają wszystkie wspomniane warunki, jeżeli położymy

$$\psi(x)=\sin x,\ \varphi(x)=\cos x,$$

dla funkcyj trygonometrycznych; i jeżeli położymy

$$\psi(x)=Sh\,x,\ \varphi(x)=Ch\,x,$$

dla funkcyj hiperbolicznych; przytem w pierwszym przypadku mamy $\psi(u)-\psi(v)=-2\psi\left(\frac{u+v}{2}\right)\psi\left(\frac{u-v}{2}\right)$, a w drugim przypadku taki sam wzór ze znakiem $+$.

Zastosowawszy otrzymane poprzednio wyniki dla funkcyj $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ do funkcyj $\sin x$, $\cos x$, następnie do funkcyj $Sh\,x$, $Ch\,x$, otrzymamy:

(45) $$(\sin x)' = \cos x,\quad (\cos x)' = -\sin x;\ \text{albo}$$
$$d\sin x = \cos x\,.\,dx,\quad d\cos x = -\sin x\,dx$$

Pochodną funkcji sinus x jest funkcja cosinus, a pochodną funkcji cosinus jest funkcja sinus ze znakiem ujemnym.

Tak samo

(46) $$(Sh\,x)' = Ch\,x,\quad d\,Sh\,x = Ch\,x\,.\,dx;$$
$$(Ch\,x)' = Sh\,x,\quad d\,Ch\,x = Sh\,x\,.\,dx.$$

Pochodne funkcyj $\operatorname{tg} x$ i $Th\,x$.

Ponieważ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $Th\,x = \frac{Sh\,x}{Ch\,x}$, więc stosując (41), otrzymamy

$$d\operatorname{tg} x = d\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(d\sin x)\cos x - \sin x(d\cos x)}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 dx + \sin^2 x\,dx}{\cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

ponieważ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Otrzymaliśmy więc:

(47) $$(\operatorname{tg} x)' = \frac{d\operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\text{o ile } \cos x \neq 0!).$$

Tak samo:

$$d\,Th\,x = d\frac{Sh\,x}{Ch\,x} = \frac{d\,Sh\,x\,.\,Ch\,x - d\,Ch\,x\,Sh\,x}{Ch^2 x} =$$
$$= \frac{Ch^2 x\,dx - Sh^2 x\,dx}{Ch^2 x} = \frac{dx}{Ch^2 x},$$

ponieważ $Ch^2 x - Sh^2 x = 1$.

Otrzymaliśmy więc:

(48) $$(Th\,x)' = \frac{d\,Th\,x}{dx} = \frac{1}{Ch^2 x} \quad (\text{przyczem } Ch\,x \neq 0 \text{ zawsze!}).$$

94. *Pochodne funkcji wykładniczej i logarytmowej.*

Niech $f(x) = a^x$, (patrz l. 77). Utwórzmy pochodną,

$$f(x+h) - f(x) = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1);$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h};$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}, \text{ lecz } \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lg_e a;$$

więc $$\lim \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x . \lg_e a.$$

Ostatecznie:

(49) $$d(a^x) = a^x . \lg_e a . dx; \quad \frac{d(a^x)}{dx} = a^x . \lg_e a.$$

Jeżeli $a = e$, to

(50) $$d(e^x) = e^x . dx; \quad \frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

Ten ostatni wynik można otrzymać inną jeszcze drogą; mianowicie (patrz l. 80)

$$e^x = Shx + Chx,$$

$$d(e^x) = dShx + dChx = Chx\,dx + Shx\,dx =$$
$$= (Chx + Shx)\,dx = e^x\,dx.$$

Ponieważ $a^x = e^{kx}$, gdzie $k = \lg_e a$,

więc $$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{e^{kx+kh} - e^{kx}}{h} = e^{kx} \cdot \frac{e^{kh} - 1}{hk} \cdot k.$$

Gdy $h \to 0$, to kh także $\to 0$, więc $\frac{e^{kh} - 1}{kh}$ zmierza do pochodnej funkcji e^x w punkcie $x = 0$, czyli do jedności. A więc *pochodna funkcji* a^x *równa się* ke^{kx} *czyli* $a^x . lg_e a$.

Pochodna funkcji logarytmowej $y = \lg_e x$.

Niech $x > 0$ i $x + h > 0$; iloraz różnicowy $\frac{\lg(x+h) - \lg x}{h}$, gdzie lg oznacza logarytm przy zasadzie e, możemy przedstawić w postaci następującej:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{h}\lg\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\lg\left\{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\};$$

musimy teraz przejść do granicy, dla $h \to 0$;

lecz $\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$; (patrz l. 79).

Wskutek ciągłości funkcji logarytmowej

$$\lim_{h\to 0}\lg\left\{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\} = \lg\left\{\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\} = \lg e = 1.$$

A więc

$$\frac{d\lg x}{dx} = \lim\frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim\frac{1}{x}\left\{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\} = \frac{1}{x}, \text{ czyli}$$

(51) $$d\lg x = \frac{dx}{x}; \quad \frac{d\lg x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Pochodna funkcji logarytmowej $y = \mathrm{Log}\,x$, *(przy zasadzie* $a > 0$). Zasada $a > 0$ i $a \neq 1$; wtedy $x = a^{\mathrm{Log}\,x}$; $\lg x = \mathrm{Log}\,x \,.\, \lg a$:

$$\mathrm{Log}\,x = M \,.\, \lg x,$$

gdzie $M = \frac{1}{\lg_e a} = \mathrm{Log}\,a$. (moduł); stąd

(52) $$\frac{d\,\mathrm{Log}\,x}{dx} = \frac{M}{x}$$

Udowodnimy później, że funkcja logarytmowa jest funkcją przestępną; godnem jest uwagi, że pochodna tej funkcji przestępnej jest funkcją wymierną, jedną z najprostszych $\frac{M}{x}$.

Pochodną funkcji logarytmowej moglibyśmy byli obliczyć w inny jeszcze sposób, opierając się na tem, że funkcja logarytmowa jest odwrotną do funkcji wykładniczej, czyli że

(53) $$y = \mathrm{Log}_a x, \; (x > 0),$$

wyraża ten sam związek między x i y, co i zależność

(54) $$x = a^y;$$

ponieważ odpowiedniość między x i y jest doskonała, więc wyrażenia (53) i (54) określają te same pary liczb w ten sposób, że jeżeli x ma tę samą wartość w (53 i w (54), to i y w tychże wzorach musi mieć tę samą wartość; jeżeli y w (53) i w (54) ma tę samą wartość, to i x musi mieć tę samą wartość.

Oznaczmy przez $\triangle y$ i $\triangle x$ odpowiadające sobie przyrosty y i x, t. j, jeżeli liczbie x odpowiada liczba y, to liczbie $x + \triangle x$ odpowiadać będzie liczba $y + \triangle y$, przyczem

$$y + \triangle y = \operatorname{Log}(x + \triangle x),$$

$$x + \triangle x = a^{y+\triangle y}; \quad \triangle x = a^{y+\triangle y} - a^y$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{\frac{a^{y+\triangle y} - a^y}{\triangle y}}; \quad (\triangle x \neq 0)$$

o ile $\triangle x \neq 0$, to i $\triangle y \neq 0$, czyli wyrażenie po stronie prawej ostatniej równości jest w zupełności oznaczone; gdy $\triangle x \to 0$, to i $\triangle y$ dąży do zera, ponieważ funkcja $y = \operatorname{Log} x$ jest funkcją ciągłą zmiennej x.

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{a^{y+\triangle y} - a^y}{\triangle y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{a^{y+\triangle y} - a^y}{\triangle y} = a^y \lg a;$$

a więc:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{a^{y+\triangle y} - a^y}{\triangle y}} = \frac{1}{a^y \lg a} = \frac{M}{x};$$

otrzymaliśmy ten sam wynik.

Czytelnik już z tego przykładu domyśla się istnienia pewnego ogólnego prawa, który wyraża związek między pochodnemi dwóch funkcyj odwrotnych. Prawo to możemy z łatwością ująć najpierw na drodze interpretacji geome-

trycznej. Jak wiemy (N. 64) obrazy geometryczne dwóch funkcyj:

$$y = f(x)$$
$$x = f(y)$$

są symetryczne względem dwusiecznej, t. j. każdemu punktowi M_1 pierwszej krzywej odpowiada punkt M_2 drugiej krzywej, przyczem punkty M i M' są symetryczne względem dwusiecznej $y = x$. Jeżeli teraz przeprowadzimy (rys. 1) styczne do obu krzywych w punktach, odpowiednio, M_1 i M_2, to te styczne, jasna rzecz*, muszą też być symetryczne względem dwusiecznej; kąty, które tworzą styczne $M_1 T_1$ i $M_2 T_2$ z Ox w sumie dają $\frac{\pi}{2}$, a więc ich współczynniki kierunkowe są liczbami odwrotnemi, o ile jedna ze stycznych $M_1 T_1$ i $M_2 T_2$ nie jest równoległa do osi Ox; jeżeli zaś $M_1 T_1 \parallel Ox$, to $M_2 T_2 \parallel Oy$.

Z punktu widzenia związku między stycznemi w dwóch odpowiadających sobie punktach krzywych $y = f(y)$ i $x = f(y)$, sprawa jest, przez podane przed chwilą rozważania, dostatecznie wyjaśniona. Co innego, jeżeli spojrzymy na tę rzecz ze stanowiska teorji funkcyj; bo spółczynnik kierunkowy stycznej jest pochodną funkcji, wyrażającej związek między rzędną i odciętą; otóż zamiast takiej funkcji mamy zależność $y = f(x)$, tak że sprawa wiąże się z istnieniem funkcji odwrotnej, której istnienie należy założyć; tych funkcyj odwrotnych może być nieskończenie wiele, należy więc także wyjaśnić, o którą z nich chodzi, t. j. trzeba wiedzieć, do której z tych funkcyj odnosi się odpowiednia styczna z poprzedniej interpretacji geometrycznej. Tem więc zagadnieniem zajmiemy się teraz.

---

* Czytelnik może tę symetrję stycznych w punktach M i M' zupełnie ściśle udowodnić.

95. *Pochodna funkcji odwrotnej.*

Przypuśćmy, że x jest funkcją zmiennej niezależnej y, t. j. $x = f(y)$ w przedziale (m, n) i że jest ciągłą w tym przedziale. Niech b oznacza pewną wartość y, należącą do (m, n), i niech $a = f(b)$. Możemy teraz przyjąć, że istnieje funkcja odwrotna, t. j. że między wartościami zmiennej y w (m, n) i zmiennej $x = f(y)$ istnieje odpowiedniość doskonała, co może mieć miejsce tylko wtedy, gdy $f(y)$ jest funkcją rosnącą (malejącą) w (m, n), i to musimy więc założyć. Wtedy x przyjmuje wszystkie wartości, należące do przedziału, wyznaczonego przez $f(m)$ i $f(n)$ (patrz l. 78); oznaczmy przez (μ, λ) ten przedział; liczba a należy do $(\mu. \lambda)$. Funkcja odwrotna w tych warunkach istnieje i jest wyznaczona w przedziale (μ, λ); oznaczmy ją przez $y = \varphi(x)$; wtedy $b = \varphi(a)$.

Możemy teraz udowodnić istnienie pochodnej funkcji $\varphi(x)$ w każdym punkcie a przedziału (μ, λ), o ile $f'(b) \neq 0$. Utwórzmy w tym celu iloraz różnicowy $\frac{\triangle y}{\triangle x}$; mamy

$$\triangle y = \varphi(x + \triangle x) - \varphi(x),$$

(55) $$\text{czyli} \quad y + \triangle y = \varphi(x + \triangle x);$$

x i $x + \triangle x$ należą do (μ, λ) z powodu odpowiedniości doskonałej między x i y, którą tylko co określiliśmy, liczby $x, y, \triangle x, \triangle y$ mają w zależności (56)

(56) $$x + \triangle x = f(y + \triangle y),$$

te same wartości, co i w (55); z ciągłości funkcji $f(y)$, wynika, jak wiemy, ciągłość funkcji $\varphi(x)$; gdy $\triangle y \to 0$, to i $\triangle x \to 0$ i odwrotnie, t. j. gdy $\triangle x \to 0$, to i $\triangle y \to 0$. Przy ustalonych wartościach x i y, (może być, np., $x = a$, $y = b$), zależność między $\triangle x$ i $\triangle y$, którą ustanawia (56) lub (57) jest także doskonała i ciągła; tak więc wartościom $\triangle y$, ograniczonym przez

$$0 < |\triangle y| \leqslant k^*, \quad (k > 0)$$

odpowiadają wartości na $\triangle x$, ograniczone przez

$$0 < |\triangle x| \leqslant h, \quad (h > 0)$$

przytem wszystkie wartości tego przedziału $(0, h)$, z wyjątkiem wartości $\triangle x = 0$, gdyż $\triangle x = f(y + \triangle y) - f(x)$, gdzie y i $y + \triangle y$ należą do (m, n); gdyby $\triangle x = 0$ dla $\triangle y \neq 0$, to $f(y + \triangle y) = f(y)$ wbrew naszemu założeniu, że funkcja jest rosnąca (malejąca) w przedziale (m, n).

Możemy więc napisać:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{\frac{\triangle x}{\triangle y}}, \quad (\triangle x \neq 0, \triangle y \neq 0), \tag{58}$$

Jeżeli teraz $\triangle y \to 0$, to $\frac{\triangle x}{\triangle y} \to f'(y)$, którą to wartość, zakładamy, różna jest od zera. Przechodząc więc w (58) do granicy, otrzymujemy:

$$\varphi'(x) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{\lim\limits_{\triangle y \to x} \frac{\triangle x}{\triangle y}} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'\{\varphi(x)\}}. \tag{58'}$$

Zwróćmy uwagę na tę okoliczność, że trzeba było znaleźć granicę $= \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$, myśmy zaś zastąpili powyższą granicę przez $\lim\limits_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$; zjawia się pytanie, czy jest to uzasadnione; czyli trzeba odpowiedzieć na pytanie: czy z istnienia granicy $\lim\limits_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$, można wnioskować, że istnieje granica $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$, równa poprzedniej. Istnienie granicy $y = \lim\limits_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$ oznacza, że do każdej liczby $\varepsilon > 0$, dostatecznie małej, można obrać taką liczbę, $k > 0$, że

$$0 < |\triangle y| \leqslant k \quad \text{pociąga nierówność} \tag{59}$$

* Czytelnik zobaczy, jakie są drobne zmiany w rozumowaniu, jeżeli $y = m$ albo n.

$$\left|\frac{\triangle y}{\triangle x} - g\right| < \varepsilon.$$

Lecz wtedy, jak widzieliśmy przed chwilą

(60) $$0 < |\triangle x| \leqq h;$$

i *odwrotnie*, o ile $|\triangle x|$ spełnia warunek (60), to $\triangle y$ spełnia warunek (59), tak iż nierówność (60) pociąga nierówność

$$\left|\frac{\triangle y}{\triangle x} - g\right| < \varepsilon,$$

co dowodzi, że $\lim\limits_{\triangle y \to 0} \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle y}{\triangle x}$.

Jeżeli przypuścimy, że $\dfrac{\triangle x}{\triangle y} \to +\infty$, gdy $\triangle y \to 0$, to rozumowanie zupełnie podobne do poprzedniego da nam

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = 0,$$

czyli $\varphi'(x) = 0$. To samo otrzymamy, gdy $\dfrac{\triangle x}{\triangle y} \to -\infty$ dla $\triangle y \to 0$. Że taki przypadek może mieć miejsce, przekonywa nas przykład: $f(y) = y^{1/3} = x$; x jest funkcją rosnącą zmiennej y, jednoznacznie określoną;

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1^3 - x_2^3} = \frac{1}{x_1^2 + x_1 x_2 + {}_2^2} =$$
$$= \frac{1}{(x_2 + \frac{1}{2}x_1)^2 + \frac{3}{4}x_1^2} > 0, \quad (y_1 \neq y_2);$$

tak że $y_1 > y_2$ pociąga $x_1 > x_2$. Utwórzmy iloraz różnicowy w punkcie $x = 0$; mamy tu:

$$\frac{\triangle x}{\triangle y} = \frac{(\triangle y)^{1/3}}{\triangle y} = \frac{1}{(\triangle y)^{2/3}} \quad \text{i} \quad \frac{\triangle x}{\triangle y} \to +\infty, \text{ gdy } \triangle y \to 0.$$

Przypuśćmy wreszcie, że $\dfrac{\triangle x}{\triangle y} \to 0$, gdy $\triangle y \to 0$, t. j. że $f'(y) = 0$, przyczem wszystkie inne nasze założenia pozostają w mocy. To samo rozumowanie, co poprzednio daje nam w tym przedziale wynik następujący:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} \to +\infty \text{ albo } \frac{\triangle y}{\triangle x} \to -\infty, \text{ gdy } \triangle x \to 0.$$

Że taki przypadek zajść może, wskazuje nam przykład: $x = f(y) = y^3$; x jest funkcją jednoznacznie określoną ciągłą i rosnącą zmiennej y. Pochodną w punkcie $y = 0$ jest zero, gdyż $f'(y) = 3y^2$, $f'(0) = 0$; $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ w punkcie tym ma wartość $= \frac{(\triangle x)^{1/3}}{\triangle x} = \frac{1}{(\triangle x)^{2/3}}$ i istotnie ten iloraz różnicowy dąży do $+\infty$, gdy $\triangle x \to 0$.

Wszystkie powyższe rozważania mogą być stosowane nawet wówczas, gdy rozpatrujemy dla funkcji $x = f(y)$ tylko albo otoczenie prawostronne albo tylko lewostronne punktu y. W pierwszym przypadku mamy $\triangle y > 0$; wtedy jak łatwo widzieć, będziemy mieli także zawsze $\triangle x > 0$ albo $\triangle x < 0$, zależnie od tego, czy $f(y)$ jest funkcją rosnącą w przedziale (m, n), czy też malejącą. Tak więc, z istnienia prawostronnej pochodnej funkcji $f(y)$ w punkcie y będziemy mogli wnioskować o istnieniu prawostronnej, względnie lewostronnej pochodnej funkcji odwrotnej $\varphi(x)$ w odpowiadającym punkcie x, zależnie od tego, czy $f(y)$ w (m, n) jest funkcją rosnącą, czy malejącą; wartości tych pochodnych są, o ile żadna z nich nie równa się zeru. liczbami odwrotnemi; gdy jeden ze stosunków różnicowych $\frac{\triangle y}{\triangle x}, \frac{\triangle x}{\triangle h}$ dąży jednostronnie do zera, to drugi jednostronnie rośnie do $+\infty$ albo do $-\infty$.

Zauważymy jeszcze, że wzór (58′),

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'\{\varphi(x)\}}, \tag{61}$$

który daje pochodną funkcji odwrotnej względem zależności $x = f(y)$ jest wzorem nadzwyczaj godnym uwagi; zauważmy bowiem, że zależność $x = f(y)$ może określić (jeżeli rozszerzymy nasze założenia) nie jedną, ale więcej, nawet nieskończenie wiele funkcyj $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ wyznaczonych w tym samym przedziale (μ, λ) zmiennej x. Otóż zachodzić będzie zawsze zależność

$$\varphi'_n(x) = \frac{1}{f'\{\varphi_n(x)\}},$$

dla każdego wskaźnika n.

96. *Pochodne funkcyj odwrotnych do funkcyj trygonometrycznych i hiperbolicznych.*

Jako zastosowanie poprzedniego rozdziału obliczmy pochodne funkcyj odwrotnych do funkcyj trygonometrycznych i hiperbolicznych.

Zaczniemy *od funkcji* $y = \operatorname{Arc} \sin x$; funkcja ta jest określona w przedziale $(-1, +1)$ wartości zmiennej x, przyczem $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ i jest funkcją rosnącą w tym przedziale.

Tutaj $x = \sin y$, tak iż funkcją $f(y)$ ze wzoru (61) jest $\sin y$, a więc $f'(y) = \cos y$;

$$\frac{d \operatorname{Arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\cos y};$$

ponieważ zaś $x = \sin y$, więc

$$\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm \sqrt{1 - x^2};$$

tutaj $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, a więc $\cos y > 0$, należy wziąć więc pierwiastki ze znakiem $+$ Czyli ostatecznie

$$\frac{d \operatorname{Arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{+\sqrt{1 - x^2}}. \tag{62}$$

Możemy zastosować uwagę z końca poprzedniego rozdziału. Zależność $x = \sin y$ określa nieskończenie wiele funkcyj odwrotnych $\varphi_n(x) = \operatorname{arc} \sin x$ i pochodne tych wszystkich funkcyj są wyznaczone przez ten sam wzór

$$\frac{d \varphi_n(x)}{dx} = \frac{1}{\cos \varphi_n(x)} \frac{1}{\cos y};$$

funkcje $\varphi_n(x)$ dzielą się na dwie grupy, te, które są zawarte między $\frac{\pi}{2}(4k - 1)$ i $\frac{\pi}{2}(4k + 1)$ i te, które są zawarte między $\frac{\pi}{2}(4k + 1)$ i $\frac{\pi}{2}(4k + 3)$, (gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); dla

pierwszej grupy $\cos y > 0$, dla drugiej $\cos y < 0$, stąd wynika, że $\varphi'_n(x) = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$, przyczem dla pierwszej grupy mamy przed pierwiastkiem znak $+$, a dla drugiej znak $-$; można się o tem przekonać bezpośrednio, gdyż, jak wiadomo, $\varphi_n(x) = n\pi + (-1)^n \operatorname{Arc}\sin x$; gdy n jest parzyste, mamy funkcję pierwszej grupy, gdy n jest liczbą nieparzystą, mamy funkcję drugiej grupy. Gdy $x = \pm 1$, $\frac{\triangle\varphi_n(x)}{\triangle x}$ dąży do $+\infty$ albo do $-\infty$, zależnie od tego, czy n jest liczbą parzystą, czy też nieparzystą.

Pochodna funkcji $y = \operatorname{Arc}\cos x$; funkcja ta również jest określona tylko w przedziale $(-1, +1)$ zmiennej x i przytem $0 \leqslant y \leqslant \pi$; stosując (61), otrzymamy

$$\frac{d \operatorname{Arc}\cos x}{dx} = -\frac{1}{\sin y},$$

gdyż w tym przypadku $x = \cos y$ i $f'(y) = -\sin y$. Ponieważ $0 \leqslant y \leqslant \pi$, to $\sin y > 0$, czyli pochodna nie może być dodatnia; lecz $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$; ostatecznie

(63 $$\frac{d \operatorname{Arc}\cos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

ten wynik można było przewidzieć z góry, gdyż

$$\operatorname{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\sin x, \text{ czyli}$$

$$\frac{d \operatorname{Arc}\cos x}{dx} = -\frac{d \operatorname{Arc}\sin y}{dx}.$$

Jeżeli $\varphi_n(x) = y$ oznacza którąkolwiek z funkcyj odwrotnych, wyznaczonych przez $x = \cos y$, to

$$\frac{d\varphi_n(x)}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}},$$

gdzie znak *mniej* stosuje się do funkcji

$$\operatorname{Arc}\cos x + 2\pi n, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

a znak *mniej* do funkcji $-\operatorname{Arc}\cos x + 2\pi n$.

Przejdźmy do funkcji $y = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$; funkcja ta jest określona dla wszystkich wartości x, przyczem $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Tu $x = \operatorname{tg} y$, $f'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$; na zasadzie wzoru (61).

$$\text{(64)} \qquad \frac{d \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2};$$

wszystkie inne funkcje, wyznaczone przez odwrócenie zależności $x = \operatorname{tg} y$ mają tę samą pochodną.

Udowodnimy później, że funkcja $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$ jest funkcją przestępną; mamy znów przykład funkcji przestępnej, której pochodna jest funkcją wymierną $\left(\text{poprzednio było } \frac{d \lg x}{dx} = \frac{1}{x}\right)$.

Pochodne funkcyj hiperbolicznych.

Niech $y = \arg Shx = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$; funkcja ta jest określona dla wszystkich wartości x i sama może przybrać dowolną wartość liczbową; jest to jedyna funkcja, którą można otrzymać, odwracając zależność $x = Shy$; tu $f(y) = Shy$, $f'(y) = Chy = \sqrt{1 + Sh^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$; tutaj niema żadnej wątpliwości co do znaku, znak musi być $+$, bo $Chy > 0$ dla każdej wartości y. Mamy więc

$$\text{(65)} \qquad \frac{d \operatorname{Arg} Shx}{dx} = \frac{d \lg_e (x + \sqrt{x^2 + 1})}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Funkcja $y = \operatorname{Arg} Chx$; jest ona określona tylko dla wartości $x > 1$ i może przyjmować wszystkie wartości dodatnie; odwrócenie zależności $x = Chy$ daje tylko dwie funkcje $y_1 = \operatorname{Arg} Chx$ i $y_2 = -\operatorname{Arg} Chx$. W tym przypadku $f(y) = Chy$, $f'(y) = Shy$; lecz $Shy = \pm\sqrt{Ch^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2 - 1}$; w tym przypadku należy wziąć znak więcej,

gdyż $y = \operatorname{Arg} Ch x > 0$, a więc i $Sh y > 0$. Wzór (61) daje:

$$(66) \qquad \frac{d \operatorname{Arg} Ch x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}; \text{ a zatem}$$

$$\frac{d \lg_e (x + \sqrt{x^2 - 1})}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$\frac{d \lg_e (x - \sqrt{x^2 - 1})}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Funkcja $y = \operatorname{Arg} Th x$; funkcja ta jest określona tylko dla $|x| \leqslant 1$; y może przyjmować wszystkie wartości rzeczywiste. Jest to jedyna funkcja, którą można otrzymać przez odwrócenie zależności $x = Th y$; $f(y) = Th y$, $f'(y) = \frac{1}{Ch^2 y} =$ $= 1 - Th^2 y = 1 - x^2$, a więc z (61) otrzymamy:

$$(67) \qquad \frac{d \operatorname{Arg} Th x}{dx} = \frac{d \left(\frac{1}{2} \lg_e \frac{1 + x}{1 - x}\right)}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

97. *Pochodna funkcji* $y = x^\alpha$.

Gdy $\alpha = n$, gdzie n liczba całkowita dodatnia, to pochodna $y' = n x^{n-1}$. Udowodnimy, iż ten wzór jest ogólny, t. j. że się stosuje dla każdego α. Powinniśmy najprzód określić tę funkcję dla każdego wykładnika α. Niech α oznacza dowolną liczbę rzeczywistą; wtedy x^α oznaczać będzie funkcję

$$y = e^{\alpha \, . \, lg x},$$

która jest wyznaczona dla każdej wartości $x > 0$, przytem także $y > 0$. Można się przekonać, że dla $\alpha = n$ (liczba całkowita), to określenie pokrywa się ze zwykłem, ale tylko dla $x > 0$; dla $\alpha = \frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitemi bez czynników wspólnych nasze określenie pokrywa się ze zwykłem, ale bez zastrzeżeń tylko przy q parzystem, o ile weźmiemy w $\sqrt[q]{x^p}$ wartość arytmetyczną pierwiastka; o ile

zaś q jest liczbą nieparzystą, to musi być zastrzeżenie $x > 0$.

Funkcja $y = e^{\alpha \, lg\, x}$ jest funkcją ciągłą zmiennej x (dla $x > 0$, ponieważ jest funkcją ciągłą e^z funkcji ciągłej $z = \alpha\, lg\, x$.

Przejdźmy do obliczenia pochodnej; niech $x > 0$ i $x + h > 0$; $\triangle y = e^{\alpha\, lg(x+h)} - e^{\alpha\, lg\, x} = e^{\alpha\, lg\, x}\{e^{\alpha\{lg(x+h) - lg x\}} - 1\} = x^\alpha . (e^z - 1)$, gdzie $z = \alpha\{\lg(x+h) - \lg x\}$. Możemy wykluczyć przypadek, gdy $\alpha = 0$, bo wtedy $\triangle y = 0$ i pochodna $= 0$, zgodnie ze wzorem, który mamy udowodnić $y' = \alpha . x^{\alpha - 1}$.

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = x^\alpha \cdot \frac{e^z - 1}{h} = x^\alpha \cdot \frac{e^z - 1}{z} \cdot \frac{z}{h}; \tag{68}$$

gdy $h \to 0$, $z \to 0$ i $\dfrac{e^z - 1}{z} \to 1$;

$\dfrac{z}{h} = \dfrac{\alpha\{\lg(x+h) - \lg x\}}{h}$ dąży wtedy do $\dfrac{\alpha}{x}$.

Przechodząc w (68) do granicy dla $h \to 0$, otrzymamy

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = x^\alpha \lim_{h \to 0} \frac{e^z - 1}{z} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{z}{h} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x},$$

czy

$$d\,(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha - 1} . dx, \tag{69}$$

co trzeba było udowodnić.

Zbadajmy jeszcze, jak się zachowuje nasza funkcja, gdy x prawostronnie dąży do zera.

Gdy $\alpha > 0$, to $x^\alpha \to 0$, gdyż $x^\alpha = e^{\alpha\, lg\, x}$; $\lg x \to -\infty$; przy $x \to 0$; $\alpha \lg x \to -\infty$ i $e^{\alpha\, lg\, x} \to 0$.

Przechodząc do pochodnej, powinniśmy odróżnić $f'(0)$ od $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$; w punkcie $x = 0$. ilorazem różnicowym jest $\dfrac{h^\alpha}{h} = h^{\alpha - 1}$; widzimy więc, że $f'(0) = 0$, gdy $\alpha > 2$; gdy zaś $0 < \alpha < 1$, to iloraz różnicowy dąży do $+\infty$. Gdybyśmy badali $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$, otrzymalibyśmy w danym przypadku te same wyniki. Jeżeli $\alpha < 0$, to $x^\alpha \to +\infty$ dla $x \to 0$, gdyż $\alpha \lg x \to +\infty$, a więc i $e^{\alpha\, lg\, x} \to +\infty$. W tym przypadku $f'(0)$ nie stnieje, a $f'(x) \to -\infty$, gdy $x \to 0$.

W interpretacji geometrycznej, krzywa $y=x^\alpha$, gdy $\alpha>1$ jest styczną w punkcie $x=0$ do osi odciętych; gdy $0<\alpha<1$, krzywa $y=x^\alpha$ jest styczna w punkcie $x=0$ do osi rzędnych Oy.

98. *Pochodna funkcji złożonej.*

Przy pomocy funkcyj złożonych można z niewielkiej liczby funkcyj elementarnych utworzyć dowolnie wiele funkcyj; zajmiemy się teraz obliczeniem pochodnej funkcji złożonej. Niech $y=F(x)=\{f(\varphi(x)\}$; czyli, kładąc $u=\varphi(x)$, mamy $y=F(x)=f(u)$, gdzie $u=\varphi(x)$; y jest funkcją zmiennej x za pośrednictwem zmiennej u; tak, np., możemy rozpatrywać funkcję $y=e^{x^2}$ jako funkcję złożoną z dwóch ogniw: $y=e^u$, $u=x^2$; każdej wartości x odpowiada wartość u, której to wartości u odpowiada jedna wartość zmiennej y; w ten sposób y jest funkcją x, i tego rodzaju zależność funkcjonalna daje się rozłożyć na dwie zależności prostsze. Jeżeli $y=\varphi(u)$, jest funkcją, określoną w przedziale (μ, λ) zmiennej u, to należy brać pod uwagę tylko takie wartości zmiennej x, by odpowiadające wartości u funkcji $\varphi(x)$ także należały do przedziału (μ, λ). Założymy więc, że ten warunek jest spełniony; jeżeli funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła w punkcie $u=\varphi(x)$, to funkcja złożona $F(x)=f\{\varphi(x)\}$ jest, jak wiemy (patrz l. 72), funkcją ciagłą zmiennej x w punkcie x.

Jeżeli funkcja $\varphi(x)$ posiada pochodną w punkcie x, a funkcja $f(u)$, jako funkcja zmiennej niezależnej u, posiada w punkcie $u=\varphi(x)$ pochodną, to *i funkcja złożona* $F(x)=f\{\varphi(x)\}$, *jako funkcja zmiennej niezależnej x, posiada pochodną w punkcie x i wartość pochodnej w tym punkcie równa się iloczynowi pochodnej funkcji $f(u)$ względem u przez pochodną funkcji $\varphi(x)$ względem x,* $F'(x)=f'(u).\varphi'(x)=f'\{\varphi(x)\}.\varphi'(x)$; albo w znakowaniu różniczkowem

(70) $$dF(x)=df\{\varphi(x)\}=f'\{\varphi(x)\}.d\varphi(x).$$

Dla dowodu utwórzmy odpowiednie ilorazy różnicowe; wartości x niech odpowiada wartość u, a wartość $x+h$, niech odpowiada wartość $u+k$, tak, że $u+k=\varphi(x+h)$, $u=\varphi(x)$, $k=\varphi(x+h)-\varphi(x)$. Zbadać, czy funkcja $F(x)$ posiada pochodną, to znaczy zbadać, czy istnieje granica ilorazu różnicowego

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f\{\varphi(x+h)\}-f\{\varphi(x)\}}{h}=\frac{f(u+k)-f(u)}{h},$$

gdy $h \to 0$. Możemy napisać ten iloraz w postaci (dla $h \neq 0$):

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(u+k)-f(u)}{k}\cdot\frac{k}{h}= \tag{71}$$

$$=\frac{f(u+k)-f(u)}{k}\cdot\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h},$$

o ile liczba k nie równa się zeru. Ale równość (71) pozostaje spełnioną nawet dla $k=0$, jeżeli umówimy się nadać ilorazowi różnicowemu, jako funkcji zmiennej k, dla $k=0$ wartość $f'(u)$, t. j. pochodnej, która na mocy założenia istnieje. Sprawdźmy, że przy spełnieniu tego warunku równość (71) jest spełniona; w rzeczy samej, jeżeli $k=0$, to $\varphi(x+h)=\varphi(x)$ i $F(x+h)=f\{\varphi)x+h)\}=f\{\varphi(x)\}=$ $=F(x)$, t. j. lewa strona równości (71) $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ równa się zeru; po drugiej stronie znaku równości w (71) pierwszy czynnik równa się $f'(u)$, a drugi czynnik $\frac{k}{h}$ równa się zeru; tak więc i prawa strona równości (71) równa się zeru i równanie (71) jest spełnione. Przejdźmy teraz w (71) do granicy dla $h \to 0$. Po drugiej stronie znaku równości będziemy mieli iloczyn dwóch granic,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(u+k)-f(u)}{k} \text{ i } \lim\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h};$$

druga z tych granic jest pochodną $\varphi'(x)$ na mocy założe-

nia o istnieniu tej pochodnej. Co do pierwszej granicy, wiemy, że

$$(72) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(u+k) - f(u)}{k} = f'(u);$$

gdy $h \to 0$, to $k \to 0$, na mocy ciągłości funkcji $\varphi(x)$, bo $k = \varphi(x+h) - (x)$, ale zmierzając do zera, k może nieskończenie wiele razy przejść przez wartość zero, co jest wykluczone w postaci (72). Lecz dla $k=0$ w (71) nadaliśmy wyrażeniu $\frac{f(u+k)-f(u)}{k}$ wartość $f'(u)$; dzięki temu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u+k) - f(u)}{k} = f'(u).$$

Widzimy więc,* że w (71) oba czynniki po stronie drugiej posiadają granicę, a więc strona lewa posiada granicę, co dowodzi istnienia pochodnej funkcji złożonej $F(x)$; przez przejście do granicy (71) daje

$$F'(x) = f'(u) \, . \, \varphi'(x),$$

co trzeba było udowodnić.

Uwaga I. Jasna rzecz, że twierdzenie to daje się bezpośrednio uogólnić dla funkcji złożonej z większej liczby ogniw; niech np., $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(w), \ldots$, wtedy

---

* Do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\eta > 0$ tak, by dla $0 < h \leqslant \eta$, $\left|\frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u)\right| < \varepsilon$; w rzeczy samej, możemy tak dobrać η, by $0 < h \leqslant \eta$ pociągało $0 \leqslant k \leqslant \delta$, na mocy ciągłości $\varphi(x)$, a $0 < k \leqslant \delta$ pociągało $\left|\frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u)\right| < \varepsilon$ na mocy założenia, że $\lim_{k \to 0} \frac{f(u+k)-f(u)}{k} = f'(u)$. Jeżeli η będzie w ten sposób dobrane, to to $0 < k \leqslant \eta$ pociągnie $\left|\frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u)\right| < \varepsilon$, gdyż wtedy albo $0 < k \leqslant \delta$, albo $k = 0$; a gdy $k = 0$, $\frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u) = 0$.

$y' = f'(u) . \varphi'(v) . \psi'(w), \ldots$, z zastrzeżeniem, że liczba funkcji pośrednich jest skończona. Tak więc pochodna funkcji złożonej równa się iloczynowi pochodnych funkcji pośredniczących, przyczem należy brać pochodną każdej z tych funkcji względem tej ze zmiennych, od której ta funkcja bezpośrednio zależy.

Uwaga II. Jeżeli $x = f(y)$, a y jest funkcją odwrotną $y = \varphi(x)$, to $x = f\{\varphi(x)\}$ w pewnym przedziale (m, n) zmiennej x. Biorąc pochodną obu stron według prawa na pochodną funkcji złożonej otrzymamy:

$$1 = f'\{\varphi(x)\} . \varphi'(x), \text{ czyli}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'\{\varphi(x)\}}$$

t. j. wzór (61).

Uwaga III. Niech $y = f(u)$ i niech u będzie zmienną niezależną, wtedy $dy = f'(u)du$; niech teraz $u = \varphi(x)$ i x będzie zmienną niezależną; wtedy $dy = f'\{\varphi(x)\} . \varphi'(x)dx = f'(u) . du$, gdyż $du = \varphi'(x)dx$. Tak więc zachodzi wzór różniczkowy $du = f'(u)du$, niezależnie od tego, czy u jest zmienną zależną czy niezależną. Jest to okoliczność, jedna z wielu, która stanowi o wyższości znakowania Leibniza nad innemi.

Przykłady:

1) Niech $y = e^{f(x)}$, $dy = e^{f(x)} df(x) = e^{f(x)} f'(x)dx$; jeżeli naprzykład $f(x) = x^2$; $y = ex^2$, $dy = ex^2 . 2x dx$, jeżeli $f(x) = \sin x$; $y = e^{\sin x}$, $dy = e^{\sin x} \cos x \, dx$.

2) Niech $y = \operatorname{Arc\,tg} f(x)$, $dy = \dfrac{df(x)}{1 + f^2(x)} = \dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx$;

jeżeli $f(x) = \dfrac{x - a}{b}$, to $y = \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{x - a}{b}$, $dy = \dfrac{b\,dx}{(x - a)^2 + b^2}$;

jeżeli $f(x) = x^2$, to $y = \operatorname{Arc\,tg} x^2$, $dy = \dfrac{2x}{1 + x^4} dx$.

3) Niech $y = \lg f(x)$, $(f(x) > 0)$, $dy = \dfrac{f'(x)dx}{f(x)}$; niech

$y = \lg\{-f(x)\}$, $(f(x) < 0)$, $dy = \frac{-df(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)dx}{f(x)}$; wniosek: jeżeli $y = \lg|f(x)|$, $(f(x) \neq 0)$, to $dy = \frac{f'(x)dx}{f(x)}$.

4) $y = \{f(x)\}^n$, $dy = n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)dx$; jeżeli $f(x) = 1 + x^2$, to $y = (1+x^2)^n$, $dy = n(1+x^3)^{n-1}.2xdx$; jeżeli $f(x) = 1 + x^2$, a $n = \frac{1}{2}$, to $y = \sqrt{1+x^2}$, $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

5) Niech $y = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$;

$$dy = \frac{dx + d\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

6) Niech $y = \lg\cos x$, $dy = -\operatorname{tg} x\,dx$; $y = \lg\lg x$,

$$dy = \frac{dx}{x\lg x};\ y = \lg\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ dy = \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{a}{2}}d\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{dx}{\sin x};\ y = \operatorname{Arctg}(k\operatorname{tg}x),\ dy = \frac{k.d(\operatorname{tg}x)}{1 + k^2\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{k\,dx}{\cos^2 x + k^2\sin^2 x};\ y = \lg\frac{1-\cos kx}{1+\cos kx},\ dy = d\lg(1-\cos kx) -$$

$$- d\lg(1+\cos kx) = \frac{k\sin kx\,dx}{1-\cos kx} + \frac{k\sin kx\,dx}{1+\cos kx} = \frac{2k\,dx}{\sin kx}.$$

Uwaga IV. Przypuśćmy, że dana jest funkcja y zmiennej x za pomocą równania $\operatorname{tg}y = k\operatorname{tg}x$; moglibyśmy z równania tego otrzymać $y = \operatorname{arc}\operatorname{tg}(k\operatorname{tg}x)$ i tworzyć pochodną, jak wyżej; ale można tego uniknąć, $y = f(x)$, $\operatorname{tg}f(x) = k\operatorname{tg}x$, biorąc pochodne obu stron względem zmiennej x, albo tworząc różniczki, otrzymamy:

$$\frac{f'(x\,dx}{\cos^2 f(x)} = \frac{k\,dx}{\cos^2 x};\ \frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{k\,dx}{\cos^2 x};\ dy = \frac{k\cos^2 y\,dx}{\cos^2 x}.$$

Taką metodę możemy stosować dla znalezienia po-

chodnej funkcji y zmiennej x, określonej przez $f(y) = \varphi(x)$

$$f'(y)\,dy = \varphi'(x)\,dx;\quad dy = \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\,dx.$$

Przypuśćmy, np., że $y = x^x$;

$$\lg y = x \lg x,$$

$$\frac{dy}{y} = x\,d\lg x + \lg x\,dx = (1 + \lg x)\,dx,$$

$$dy = x^{(x^x)},\ \lg y = x^x \lg x,\ \frac{dy}{y} = d\,(x^x)\lg x + x^x\,d\lg x =$$

$$= x^x(1 + \lg x)\,dx + x^{x-1}\,dx;\ dy = x^{x+x^x}\left\{\frac{1}{x} + \lg x + \lg^2 x\right\}.$$

Zauważmy jeszcze, że pochodną funkcji $f(ax + b)$ jest $af'(ax+b)$, czyli inaczej, $df(ax+b) = a\,.\,f'\,(ax+b)\,.\,dx$.

99. *Pochodne rzędów wyższych i różniczkowanie wielokrotne.*

Niech $f'(x)$; oznacza pochodną funkcji $f(x)$; z funkcją $f'(x)$ możemy postąpić jak z funkcją $f(x)$, otrzymamy wtedy pochodną drugą $f''(x)$, która jest pochodną pochodnej pierwszej. Jeżeli pochodna druga istnieje, to możemy utworzyć pochodną tej pochodnej trzeciej i t. d. Gdyby którakolwiek z otrzymanych funkcyj nie miała pochodnej, to ciąg tych funkcyj, z których każda następna jest pochodną poprzedniej urywa się w pewnem miejscu; jeżeli nie, to w ten sposób dochodzimy do pojęcia pochodnej n rzędu lub n^{tej} pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie x, dla dowolnego n, (n liczba całkowita dodatnia). Ciąg tych funkcyj będziemy oznaczali przez

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots,\ f^{(n)}(x), \ldots$$

Używając znakowania różniczkowego Leibniza $df(x) = f'(x)\,dx$, $df'(x) = f''(x)\,dx, \ldots$, $df^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x)\,dx, \ldots$; jeżeli x jest zmienną niezależną, to dx jest stałą, więc $dd\,f(x) = df'(x)\,dx = f''(x)\,.\,(dx)^2$; $ddd\,f(x) = df''(x)\,(dx)^2 = f'''(x)\,(dx)^3, \ldots$ Dla skrócenia będziemy pisali $d^2f(x)$ za-

miast $ddf(x)$, $d^3f(x)=dddf(x)$ i t. d. $d^nf(x)$ będziemy nazywali różniczką n^{go} rzędu; ta różniczka równa się więc

$$d^nf(x)=f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)\,.\,(dx)^n=f^n(x)\,.\,dx^n.$$

Na pochodną n^{go} rzędu mamy więc znakowanie

$$f^{(n)}(x)==\frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

W przypadku różniczki i pochodnej pierwszego rzędu, wzór:

$$df(u)=f'(u)\,du$$

miał miejsce, niezależnie od tego, czy u jest zmienną niezależną $u=x$, czy też u jest zmienną zależną $u=\varphi(x)$. Przy pochodnych i różniczkach wyższego rzędu, otrzymujemy różne wyrażenia, zależnie od tego, czy zmienna jest zależna, czy niezależna; gdy różniczka jest różniczką zmiennej niezależnej, otrzymaliśmy wzór $d^nf(x)=f^{(n)}dx$: gdy zaś występuje różniczka du zmiennej zależnej, należy przy różniczkowaniu wzoru $df(u)=f'(u)\,.\,du$ zastosować wzór na różniczkę iloczynu, przyczem du już nie jest stałą, gdyż $du=\varphi'(x)\,.\,dx$. Otrzymujemy więc

$$d^2f(u)=f''(u)\,du^2+f'(u)\,.\,d^2u$$

$$d^3f(u)=f'''(u)\,du^3+3f''(u)\,du\,d^2u+f'(u)\,d^3u,\ldots$$

gdzie, oczywiście,

$$du=\varphi'(x)\,dx,\ d^2u=\varphi''(x)\,.\,dx^2,\ d^3u=\varphi'''(x)\,dx^3,\ldots$$

Pochodne wyższych rzędów iloczynu.

Niech $y=u(x)\,.\,v(x)$

$$dy=u\,dv+v\,du$$

$$d^2y=u\,d^2v+2\,du\,.\,dv+v\,d^2u$$

$$d^3y=u\,d^3v+3\,du\,d^2v+3\,du^2\,dv+v\,d^3u$$

. . . .

Leibniz znalazł dla d^ny wzór

$$d^ny=ud^nv+C_n^1\,du\,dv^{n-1}+C_n^2\,d^2u\,d^{n-2}v+\ldots+C_n^p\,d^pu\,d^{n-p}v+\ldots$$

$$\ldots+C_n^{n-1}\,.\,du^{n-1}\,.\,dv+v\,d^nu,$$

gdzie $C^1_n, C^2_n, \ldots, C^p_n, \ldots$ oznaczają spółczynniki rozwinięcia dwumianu Newtona, $C^1_n = n$, $C^2_n = \frac{n(n-1)}{2}$,

$$C^3_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\ C^p_n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p} =$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!\,p!},\ \text{gdzie } n! = 1.2.3\ldots n.$$

Dowód przez indukcję matematyczną. Wzór jest spełniony dla $n = 1, 2, 3$. Przypuśćmy, że jest spełniony dla $n = k$, udowodnimy, że będzie spełniony dla $n = k+1$. Istotnie, z $d^k y = u\,d^k v + C^1_k\,du\,d^{k-1}v + C^2_k\,d^2n\,d^{k-2}v + \ldots$ $\ldots + C^{k-1}_k d^{k-1}u\,dv + d^k u$ wynika przez różniczkowanie $d^{k+1}y = u\,d^{k+1}v + (C^1_k + 1)\,du\,d^k v + (C^2_k + C^1_k)\,d^2u\,dv^{k-1} + \ldots$ $\ldots + (C^p_k + C^{p-1}_k)d^p u\,dv^{k-p-1} + \ldots + d^{k+1}u$; lecz $C^1_k + 1 = C^1_{k+1}$, $C^2_k + C^1_k = C^2_{k+1}, \ldots, C^p_k + C^{p-1}_k = C^p_{k-1}, \ldots$, a więc $d^{k+1} = u\,d^{k+1}v + C^1_{k+1}\,du\,d^k v + C^2_{k+1}\,d^2u\,dv^{k-1} + \ldots$ $\ldots + C^p_{k+1}\,d^p u\,d^{k-p+1}v + \ldots + d^{k+1}u$.

Twierdzenie Leibniza * jest więc udowodnione. Pisząc pochodne, zamiast różniczek, nadamy mu postać

$$(73)\qquad \begin{aligned}(u\,.\,v)^n &= u^{(n)}v + C^1_n u^{(n-1)}v' + C^2_n u^{(n-2)}v'' + \\ &C^3_n u^{(n-3)}v''' + \ldots + C^{n-1}_n u'\,v^{(n-1)} + uv^{(n)}.\end{aligned}$$

Przykłady: $y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$, $y'' = n(n-1)x^{n-2}, \ldots$ $y^{(p)} = n(n-1)\ldots(n-p+1)x^{n-p}$; jeżeli n całkowite dodatnie, to w poprzedniem wyrażeniu na pochodną rzędu p należy przyjąć $p \leqslant n$; gdy $p = n$, to $y^{(n)} = n!$, $y^{(n+1)} = 0$, $y^{(p)} = 0$ dla $p > n$.

Stąd wniosek następujący: jeżeli $y = P(x)$, wielomian

---

* Wzór na różniczkę n^{go} rzędu iloczynu $u(x)\,.\,v(x)$ można napisać w postaci symbolicznej: $d^n(u.v) = (u\,dv + v\,du)^n$, gdzie po rozwinięciu według wzoru dwumianu należy potęgi zamienić na rzędy odpowiedniej różniczki.

stopnia n względem x, to pochodna n^{go} rzędu jest liczbą stałą, a pochodne wyższych rzędów są równe zeru.

Niech $y = \sin x$, to $x' = \cos x$, $y'' = -\sin x$,

$$y''' = -\cos x, \quad y^{(4)} = \sin x, \ldots, \quad y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \ldots;$$

jeżeli $y = \cos x$, to $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$, $y''' = \sin x$,

$$y^{(4)} = \cos x, \ldots, \quad y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{3}\right), \ldots$$

Niech $y = \lg x$, $y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $y'' = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$,

$$y''' = \frac{2}{x^3} = x^{-3}, \quad y^{(4)} = -\frac{1.2.3}{x^4} = 6\,x^{-4}, \ldots$$

$$y^{(n)} = (-1)^n (n-1)!\, x^{-n}, \ldots$$

Jeżeli $y = e^x$, to $y' = y'' = y''' = \ldots = e^x$; jeżeli $y = a^x$, $y' = a^x \lg a$, $y'' = a^x (\lg a)^2, \ldots, y^{(n)} = a^x (\lg a)^n, \ldots$

Jeżeli $y = u(x) e^x$, to $y' = (u + u') e^x$, $y'' = (u + 2u' + u'') e^x, \ldots$ i t. d.; aby otrzymać $y^{(n)}$ można zastosować wzór (73), gdzie $v = e^x$; wtedy $v' = v'' = \ldots\ldots = e^x$; otrzymamy $y^{(n)} = (u + C_n^1 u' + C_n^2 u'' + C_n^3 u''' + \ldots + u^n) e^x$.

Znaleźć pochodną n^{go} rzędu funkcji $y = x^n (1-x)^n$; stosujemy wzór (73); $u = (1-x)^n$, $v = x^n$; otrzymamy $y^{(n)} = n! \{(1-x)^n - (C_n^1)^2 x (1-x)^{n-1} + (C_k^2)^2 x^2 (1-x)^{n-2} - - (C_n^3)^2 x^3 (1-x)^{n-3} + \ldots + (-1^n x^n\}$.

Własności i zastosowanie pochodnych.

Badanie funkcji.

100. *Twierdzenie o znaku pochodnej.*

Udowodnimy najpierw następujące twierdzenie:

1[a]) *Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada pochodną w punkcie x i jeśli ta pochodna $f'(x) > 0$, to istnieje takie otoczenie punktu x, że jeżeli punkt x' należy do tego otoczenia z lewej strony, t. j. jeżeli $x' < x$, to $f(x') < f(x)$; jeżeli zaś x' jest z prawej strony, t. j. jeżeli $x' > x$, to $f(x') > f(x)$.*

Dowód jest bardzo łatwy. Iloraz różnicowy $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ zmierza do granicy dodatniej $f'(x)$, a więc można znaleźć taką liczbę $\delta>0$, że dla każdego $0<|h|\leqslant$, ów stosunek różnicowy jest tego samego znaku, co $f'(x)$, czyli dodatni; stąd wynika, że $f(x+h)-f(x)$ i h są zawsze tego samego znaku; kładąc $x+h=x'$, $x'-x=h$, widzimy, że $x'>x$ pociąga $f(x')>f(x)$, a $x'<x$ pociąga $f(x')<f(x)$.

1b) *Jeżeli $f'(x)<0$, to istnieje takie otoczenie punktu x, że dla $x'<x$ i należącego do tego otoczenia, $f(x')>f(x)$, a dla $x'>x$, $f(x')<f(x)$.*

1c) Jeżeli w punkcie x istnieje pochodna lewostronna i ma wartość dodatnią, to istnieje takie otoczenie lewostronne punktu x, że $f(x')<f(x)$, skoro x' należy do tego otoczenia; t. j. istnieje taka liczba $\delta>0$, że, jeżeli

$$x-\delta\leqslant x'<x, \text{ to}$$
$$f(x')<f(x)$$

1d) Jeżeli pochodna lewostronna ma wartość ujemną, to

$$x-\delta\leqslant x'<x$$

pociąga $$f(x')>f(x).$$

1e) Jeżeli w punkcie x istnieje pochodna prawostronna i jest >0, to można znaleźć $\delta>0$, takie, że

$$x<x'<x+\delta$$

pociąga $$f(x)<f(x')$$

1f) Jeżeli pochodna prawostronna w punkcie x jest <0, to można znaleźć $\delta<0$, takie, że

$$x<x'<x+\delta$$

pociąga $$f(x)>f(x').$$

Dowodów nie dajemy, gdyż są zupełnie podobne do dowodu pierwszego z tych twierdzeń.

Uwaga. Gdybyśmy, np., pierwsze z tych twierdzeń chcieli sformułować w ten sposób: jeżeli w punkcie x pochodna istnieje i jest dodatnia, to istnieje dostatecznie małe otoczenie punktu x, takie, że w tym przedziale funkcja nasza jest rosnąca, to takie wysłowienie byłoby fałszywe. Twierdzenie nasze wyraża ten fakt tylko, że rzędna w punkcie x jest większa od rzędnych sąsiednich z lewej strony, a mniejsza od rzędnych sąsiednich z prawej strony, ale rzędne lewo-

stronnego otoczenia mogą między sobą nie spełniać warunku, że $x'' < x' < x$ pociąga $f(x'') < f(x')$, chociaż oba warunki $f(x'') < f(x)$, $f(x') < f(x)$ są spełnione, tak iż $f'(x) > 0$ nie wyklucza wahań w dowolnie małem otoczeniu punktu x.

Jako przykład, można przytoczyć funkcję $f(x) = y = x^2 \sin \frac{1}{x} + \alpha x$, dla $x \neq 0$; i $y = 0$, dla $x = 0$; funkcja ta posiada pochodną $f'(0) = \alpha$, gdyż $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left\{ h \sin \frac{1}{h} + \alpha \right\} = \alpha$; przypuśćmy, że liczba α spełnia warunek $0 < \alpha < 1$; wtedy $f'(0) > 0$. Warunki naszego pierwszego twierdzenia są spełnione w punkcie $x = 0$. A więc istnieje otoczenie punktu 0 takie, że rzędne z lewej strony w tym otoczeniu są mniejsze od $f(0) = 0$, czyli ujemne a rzędne z prawej strony w tem otoczeniu są wszystkie większe od 0, czyli dodatnie; w tym fakcie zawarta jest cała treść twierdzenia. Jeżeli utworzymy teraz iloraz

$$\frac{f(x') - f'(x'')}{x' - x''}$$

dla naszej funkcji, to można się przekonać rachunkiem bezpośrednim iż w dowolnie małem otoczeniu, np., lewostronnem istnieją takie pary wartości x'' i x', dla których powyższy stosunek jest ujemny i takie pary wartości x'' x', dla których powyższy stosunek jest dodatni; czyli raz $x' < x''$ pociąga $f(x') < f(x'')$, a drugi raz $x' < x''$ pociąga $f(x') > f(x'')$. To samo w otoczeniu prawostronnem, t. j. dla wartości dodatnich zmiennych x'' i x'.

Tę okoliczność łatwo sobie wyjaśnić na rysunku. Zauważymy, że w przykładzie przytoczonym pochodna $f'(x)$ nie jest ciągła w punkcie $x = 0$, gdyż $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \alpha$ nie posiada granicy, gdy $x \to 0$.

Zobaczymy później, że ta okoliczność nie jest przypadkowa, gdyby bowiem $f'(x) > 0$ i gdyby funkcja $f'(x)$ była ciągła w punkcie x, to musiałby istnieć przedział $(x - \delta, x + \delta)$, taki, że dla wszystkich punktów tego przedziału nasza pochodna > 0; a stąd wynika, jak zobaczymy (patrz koniec tego rozdziału), że funkcja jest w przedziale; $(x - \delta, x + \delta)$ rosnąca.

Twierdzenia odwrotne do twierdzeń 1) a, b, c, d, e i f będą prawdziwe w formie następującej.

2^a) *Jeżeli istnieje otoczenie punktu x takie, że wszystkie rzędne w tem otoczeniu są z lewej strony mniejsze albo*

nie większe od rzędnej w punkcie x, czyli od $f(x)$, a rzędne z prawej strony są większe albo nie mniejsze od rzędnej w punkcie x, i jeżeli pochodna w tym punkcie $f'(x)$ istnieje, to nie może być ujemną.

Dla dowodu wystarczy utworzyć iloraz różnicowy $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, którego granicą jest pochodna $f'(x)$; według założeń naszego twierdzenia, o ile h jest dostatecznie małe, iloraz $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ nie jest ujemny, a więc i granica tego ilorazu nie może być ujemna. Twierdzeniu temu nadaliśmy wysłowienie geometryczne, gdyż w interpretacji geometrycznej twierdzenie to jest niemal oczywiste, w tem znaczeniu, rozumie się, że nasuwa dowód*.

2^b Jeżeli istnieje takie otoczenie punktu x, że wartości rzędnej z lewej strony są większe, a w każdym razie nie mniejsze, niż w punkcie x, a rzędne z prawej strony są mniejsze, albo nie większe, niż rzędna w punkcie x i jeżeli pochodna $f'(x)$ w punkcie x istnieje, to nie może być dodatnia.

Czytelnik sam wysłowi i udowodni twierdzenia 2^c, 2^d, 2^e i 2^f.

Jak wiemy, funkcja nazywa się rosnącą w przedziale (m, n), jeżeli większej odciętej odpowiada zawsze większa rzędna; funkcja nazywa się malejącą w przedziale (m, n), jeżeli większej odciętej w (m, n) odpowiada zawsze mniejsza rzędna.

Funkcję nazywać będziemy nie malejącą nigdy w (m, n),

* Zdanie: „twierdzenie to jest niemal oczywiste“ może mieć dwa znaczenia; pierwsze, że treść twierdzenia jest prawdą oczywistą; drugie, że dowód twierdzenia jest tak prosty, że się nam sam narzuca. Jeżeli twierdzenie jest oczywiste w pierwszem znaczeniu, to nie uwalnia nas od dowodu, gdyż fakty wskazują, jak często nas myli poczucie oczywistości. W drugim przypadku możemy dowodu nie dawać.

jeżeli większej odciętej odpowiada zawsze większa rzędna albo równa rzędna. Funkcję nazwiemy nigdy nie rosnącą w (m, n), jeżeli większej odciętej odpowiada zawsze mniejsza rzędna albo rzędna równa. Słowem, gdy funkcja jest rosnąca w (m, n)

(73) $$m \leqslant x' < x'' \leqslant n,$$

pociąga

$$f(x') < f(x'');$$

a gdy funkcja jest nie malejąca w (m, n), to (73) pociąga

$$f(x') \leqslant f(x'').$$

Gdy funkcja jest malejąca w (m, n), to (73) pociąga

$$f(x') > f(x'');$$

a gdy funkcja jest nigdy nie rosnąca w (m, n), to (73) pociąga

$$f(x') \geqslant f(x'').$$

Jasną jest rzeczą, że, jeżeli funkcja jest rosnąca w (m, n), to rzędna w każdym punkcie jest większa od rzędnych otoczenia lewostronnego, a mniejsza od rzędnych otoczenia prawostronnego; stąd i 2^a) wynika, że

3^a) *Jeżeli funkcja $f(x)$ w przedziale (m, n) rośnie (albo jest niemalejąca) i posiada pochodną w (m, n), to wartość tej pochodnej w żadnym punkcie przedziału (m, n) nie jest ujemna.*

3^b) *Jeżeli funkcja $f(x)$ w przedziale (m, n) jest malejąca (albo jest nie rosnąca) i jeżeli pochodna $f'(x)$ istnieje w (m, n), to ta pochodna nie może mieć wartości dodatniej.*

Zjawia się teraz pytanie, czy twierdzenia odwrotne do twierdzenia 3^a) i 3^b) są prawdziwe.

Zakładamy, że pochodna w (m, n) istnieje i ma wartość dodatnią w każdym punkcie przedziału (m, n). Czy można stąd wnioskować, że funkcja jest rosnąca w (m, n)? Możemy zastosować twierdzenie pierwsze a; wynika z niego, że rzędne w lewostronnem otoczeniu każdego punktu są mniejsze od rzędnej w tym punkcie, a rzędne w prawostronnem oto-

czeniu tego punktu są większe. Czy stąd wynika, że funkcja jest rosnąca w (m, n); że należy być ostrożnym we wnioskowaniu, wskazuje przykład i uwaga przy twierdzeniach $1^a)$, $1^b)$ i t. d. Jednak odpowiedź na nasze pytanie jest tu twierdząca; funkcja jest rosnąca w (m, n). Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności. Przypuśćmy, że w (m, n) można znaleźć takie dwa punkty, że $a_1 < b_1$, lecz $f(a_1) > f(b_1)$ przedział (a_1, b_1) podzielony na dwie równe części w punkcie $\frac{1}{2}(a_1 + b_1)$; jakąkolwiek jest wartość funkcji w punkcie $\frac{1}{2}(a_1 + b_1)$, łatwo się przekonać, że jeden z dwóch przedziałów $[a_1, \frac{1}{2}(a_1 + b_1)]$, $[\frac{1}{2}(a_1 + b_1), b_1]$, który nazwiemy (a_2, b_2) będzie miał tę własność, że $a_2 < b_2$, lecz $f(a_2) > f(b_2)$; postąpmy z przedziałem (a_2, b_2) jak z przedziałem (a_1, b_1), otrzymamy przedział (a_3, b_3) taki, że $a_3 < b_3$, lecz $f(a_3) > f(b_3)$; otrzymamy potem $(a_4 b_4), \ldots$, wreszcie (a_n, b_n) i tak bez końca; przytem $a_n < b_n$, lecz $f(a_n) > f(b_n)$; $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$; ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ jest oczywiście monotoniczny i ograniczony, tak samo ciąg $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, każdy z tych ciągów posiada granicę, gdyż są ograniczone i na zasadzie $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_1 - a_1)$, ta granica, dajmy na to α, jest wspólna.

Jakkolwiek małą jest liczba $\delta > 0$, w przedziale $(\alpha - \delta, \alpha)$ będą się znajdować wszystkie liczby a_n zacząwszy od pewnego wskaźnika n_0, t. j. „prawie“ wszystkie liczby ciągu $a_1, a_2, a_3, \ldots$; a w przedziale $(\alpha, \alpha + \delta)$ będą się znajdować „prawie“ wszystkie liczby ciągu $b_1, b_2, b_3 \ldots$ Jakąkolwiek wartość ma liczba $f(x)$, można więc znaleźć dwie liczby $x' = a_n$, $x'' = b_n$, należące do różnostronnych otoczeń punktu α, i takie, że albo $f(x') > f(\alpha)$, mimo że $x' < \alpha$, albo $f(\alpha) > f(x'')$, mimo że $\alpha < x''$. Lecz to jest niemożliwe, jako sprzeczne z twierdzeniem $1^a)$, gdyż $f'(\alpha) > 0$. Myśmy przyjęli, że α nie jest ani m ani n; jak należy zmienić dowodzenie w tym przypadku, zostawiamy czytelnikowi.

Udowodniliśmy więc twierdzenie 4^a), następujące:

4^a) *Jeżeli pochodna w* (m, n) *istnieje i jest w każdym punkcie dodatnia, to funkcja jest w* (m, n) *funkcją rosnącą.*

4^b) *Jeżeli pochodna w* (m, n) *istnieje i jest w każdym punkcie przedziału* (m, n) *ujemna, to funkcja jest w* (m, n) *malejącą.*

Twierdzenia 4^a i 4^b zostają w mocy nawet wtedy, gdy pochodna w skończonej liczbie punktów przedziału (m, n) przyjmuje wartość zero. Uwzględnijmy, naprzykład warunki twierdzenia 4^a) z tą zmianą, że w jednym punkcie c przedziału (m, n) pochodna równa się 0, t. j. $f'(c) = 0$, pozatem jest zawsze > 0. Podzielmy (m, n) na trzy przedziały. na $(m, c - \varepsilon)$, na $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ i $(c + \varepsilon, n)$ w pierwszym i w trzecim z tych przedziałów funkcja jest rosnąca; ale jest rosnąca i w drugim t. j. w $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, gdyż dla $x' \to c$ lewostronnie, funkcja $f(x')$ rosnąc dąży do $f(c)$, a więc $f(x') < f(c)$; tak samo, gdy $x'' \to c$ z prawej strony $f(x'')$ dąży malejąc do $f(c)$, tak że $f(c) < f(x'')$. Stąd już nietrudno wysnuć wniosek, że $f(x)$ jest funkcją rosnącą w (m, n).

Wróćmy do przykładu, podanego na początku tego rozdziału, t. j. do funkcji $y = x^2 \sin \frac{1}{x} + \alpha x$; pochodną tej funkcji w punkcie $x \neq 0$ jest $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \alpha$; niech $x = \frac{1}{2k\pi}$, wtedy $f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = \alpha + 1 > 0$, gdy zaś $x = \frac{1}{(2k+1)\pi}$, to $f'\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right) = \alpha - 1 < 0$, gdzie $|k|$ dowolnie wielką liczbą całkowitą; z $f'\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right) < 0$ wynika, że w dowolnie małem otoczeniu punktu $x = 0$ z lewej strony można znaleźć dwa punkty $x' < x''$, takie że $f(x') > f(x'')$ i że można znaleźć dwa punkty, posiadające podobne własności i z prawej strony.

Przy dowodzie twierdzeń tego rozdziału zakładaliśmy istnienie pochodnej w (m, n), ale nie zakładaliśmy ciągłości tej pochodnej.

101. *Twierdzenie Rolle'a.*

Jeżeli funkcja $f(x)$ przyjmuje tę samą wartość w punktach a i b, t. j. jeżeli $f(a)=f(b)$, to między a i b istnieje przynajmniej jeden taki punkt ξ, że wartość pochodnej w tym punkcie równa się zeru, t. j. że $f'(\xi)=0$; co do funkcji $f(x)$, zakładamy, że jest ciągła w całym przedziale, włączając punkty a i b, przyczem w tych punktach wystarcza ciągłość odpowiednio prawostronna i lewostronna; następnie, zakładamy, że istnieje pochodna $f'(x)$, w każdym punkcie x wewnątrz przedziału (a, b), t. j. dla każdego x, spełniającego warunek

$$a<x<b.$$

Udowodnimy najprzód twierdzenie Rolle'a w przypadku, gdy wspólna wartość $f(a)$ i $f(b)$ jest zerem, t. j. gdy $f(a)=f(b)=0$. Jeżeli $f(x)=0$ dla każdego x w (a, b), to $f'(x)=0$ też dla każdego x wewnątrz przedziału (a, b) i twierdzenie Rolle'a w tym prostym przypadku jest udowodnione. Pozostaje przypadek, gdy $f(x)$ nie jest $=0$ dla każdego x w (a, b); wtedy istnieją w (a, b) takie wartości zmiennej x, dla których funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości różne od zera, które mogą być dodatnie lub ujemne.

Przypuśćmy, iż wśród wartości $f(x)$ w (a, b) są wartości dodatnie. W takim razie kres górny K wartości funkcji $f(x)$ w (a, b) musi być liczbą dodatnią. Ponieważ funkcja jest ciągła w przedziale domkniętym (a, b) więc musi istotnie osiągać kres górny K dla pewnej wartości zmiennej x, którą oznaczymy przez ξ, tak że $f(\xi)=K>0$, a więc $\xi \neq a$ i $\xi \neq b$, czyli jest $a<\xi<b$.

Teraz możemy udowodnić, że pochodna $f'(x)$ równa się zeru w punkcie ξ, t. j. że $f'(\xi)=0$. Gdyby bowiem $f'(\xi)>0$, to na zasadzie twierdzenia 1[a]) z poprzedniego rozdziału istniałby taki przedział $(\xi, \xi+\varepsilon)$, że gdy

$$\xi<x<\xi+\varepsilon,$$

to $f(x) > f(\xi)$ czyli $f(x) > K$, co jest sprzeczne z określeniem kresu górnego K; a więc $f'(\xi)$ nie może mieć wartości > 0. Tak samo $f'(\xi)$ nie może mieć wartości < 0, bo $f'(\xi) < 0$ pociąga istnienie przedziału $(\xi - \varepsilon, \xi)$ takiego, że dla każdego x, spełniającego warunek $\xi - \varepsilon < x < \xi$ musi być $f(x) > f(\xi)$, czyli znowu $f(x) > K$. Ponieważ pochodna $f'(\xi)$ istnieje, ale nie jest ani > 0, ani < 0, więc $f'(\xi) = 0$.

O ile w (a, b) $f(x)$ nigdy nie przyjmuje wartości dodatnich, w takim razie poprzednie rozumowanie nie da się zastosować; ale wtedy istnieje punkt ξ, taki że $f(\xi) = k < 0$, gdzie k kres dolny wartości funkcji w (a, b), przyczem i tu także $a < \xi < b$. Rozumując, jak poprzednio, możemy udowodnić, że $f'(\xi) = 0$.

Tak więc, twierdzenie Rolle'a w tym szczególnym przypadku jest udowodnione.

Gdy wartości $f(a) = f(b) = c$ są różne od zera, wówczas tworzymy nową funkcję $\varphi(x) = f(x) - c$, która spełnia wszystkie założenia twierdzenia Rolle'a, o ile $f(x)$ je spełnia i przytem $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Do funkcji $\varphi(x)$ możemy więc zastosować tylko co udowodnione twierdzenie, czyli istnieje punkt ξ między a i b, taki, ze $\varphi'(\xi) = 0$, lecz $\varphi'(x) = f'(x)$, a więc $f'(\xi) = \varphi'(\xi) = 0$, co trzeba było udowodnić.

O ile którykolwiek z warunków, które założyliśmy co do funkcji $f(x)$ nie jest spełniony, to może się zdarzyć, że $f(a) = f(b)$, a pomimo to niema takiej wartości ξ w (a, b), by $f'(\xi) = 0$. Naprzykład, jeżeli $f(x) = x$ dla $0 \leqslant x < 1$; a $f(1) = 0$, to $f(0) = f(1) = 0$; lecz, jak łatwo sprawdzić niema w $(0, 1)$ punktu w którym $f'(x) = 0$, gdyż w tym przypadku $f'(x) = 1$ dla każdego x, spełniającego warunek $0 \leqslant x < 1$. W tym przykładzie funkcja $f(x)$ nie jest ciągłą w punkcie $x = 1$.

Niech $f(x) = +\sqrt{x}$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$, a dla $1 \leqslant x \leqslant 2$, niech $f(x) = +\sqrt{2 - x}$; funkcja ta jest ciągła w przedziale $(0, 2)$, gdyż $+\sqrt{x}$ i $+\sqrt{2 - x}$ przyjmują tę samą wartość w punkcie $x = 1$; dalej $f(0) = f(2)$; pomimo to funkcja $f'(x)$ dla żadnej wartości zmiennej x nie równa się zeru, gdyż pochodna w przedziale $(0, 1)$ wyraża się

wzorem $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, a w przedziale $(1,2)$ pochodna ma wartość $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$. W tym przykładzie funkcja nie posiada pochodnej w punkcie $x=1$, należącym do punktów wewnętrznych przedziału $(0,2)$; w samej rzeczy w punkcie $x=1$ mamy pochodną lewostronną, równą $\frac{1}{2}$, i pochodną prawostronną, równą $-\frac{1}{2}$. Tu tkwi przyczyna, dla której twierdzenie Rolle'a nie stosuje się do tej funkcji $f(x)$.

Interpretacja geometryczna twierdzenia Rolle'a: Jeżeli wykreślimy funkcję $y=f(x)$, spełniającą warunki twierdzenia Rolle'a, to między dwoma punktami a i b, dla których rzędne $f(a)$ i $f(b)$ są równe, istnieje przynajmniej jeden taki punkt pośredni, w którym styczna do krzywej jest równoległa do osi Ox. Niech M i N oznaczają te dwa punkty na krzywej, których rzędne są równe i niech A oznacza ów punkt, w którym styczna jest równoległa do Ox; połączmy M z N; cięciwa MN jest też równoległa do Ox, więc styczna w punkcie A jest równoległa do cięciwy MN. Tak więc, jeżeli cięciwa MN jest równoległa do Ox, to istnieje na krzywej punkt pośredni A, w którym styczna do krzywej jest równoległa do cięciwy MN. Czy w tem ostatniem wysłowieniu warunek, by cięciwa MN była równoległa do Ox jest istotny? Łatwo się przekonać, że nie. Odrzucając ten warunek, otrzymamy twierdzenie, będące uogólnieniem twierdzenia Rolle'a, które nazywamy twierdzeniem o wartości średniej. Wyraża ono fakt, że iloraz różnicowy równa się wartości funkcji pochodnej w punkcie pośrednim.

102. *Twierdzenie o wartości średniej.*

Niech funkcja $f(x)$ spełnia w (a,b) te same warunki, co do ciągłości i co do istnienia pochodnej, jak przy twierdzeniu Rolle'a, ale nie zakładamy już $f(a)=f(b)$.

Utwórzmy funkcję pomocniczą $F(x)=f(x)-f(a)-$

$-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$; funkcja ta spełnia, jak łatwo sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie, warunek $F(a)=F(b)$; następnie funkcja $F(x)$ spełnia i wszystkie inne warunki, wymagane od funkcji, by do niej stosowało się twierdzenie Rolle'a, ponieważ funkcja $f(x)$ spełnia te warunki. Istnieje więc punkt ξ, spełniający warunek $a<\xi<b$, dla którego $F'(\xi)=0$; lecz $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$; podstawiając w miejsce x liczbę ξ, otrzymamy więc

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ t. j.}$$

(74) $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \text{ gdzie } a<\xi<b.$$

Twierdzenie to można wyrazić w sposób następujący: *Iloraz różnicowy równa się wartości pochodnej w punkcie pośrednim.*

Albo inaczej: *Stosunek różnicy dwóch wartości funkcji do różnicy dwóch odpowiadających wartości zmiennej jest równy wartości pochodnej w punkcie pośrednim* (między wartościami zmiennej, dla których utworzyliśmy różnicę.

Wzór (74) możemy napisać w innej postaci. Oznaczmy $b-a=h$, $\xi=a+\theta h$, gdzie, θ oznacza poczem liczbę, spełniającą warunek $0<\theta<1$. Wzór (74) przyjmie postać

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h);$$

zastępując a przez x, mamy: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h)$, albo $f(x+h)-f(x)=h\, f'(x+\theta h)$.

Oznaczmy $x+h$ przez x', wtedy

(75) $$f(x')-f(x)=(x'-x).f'(x+\theta h),$$
$$\text{gdzie } h=x'-x;\ 0<\theta<1.$$

Przy stosowaniu tych wzorów należy zawsze uważać, by

warunki tyczące się ciągłości funkcji i istnienia pochodnej były spełnione.

Wniosek I. Przy pomocy twierdzenia na wartość pośrednią, możemy z największą łatwością udowodnić twierdzenia 4^a) 4^b) z rozdziału I. 100. W rzeczy samej, jeżeli pochodna jest w (a, b) dodatnia to z $x' < x$ wynika na podstawie wzoru (75) $f(x') < f(x)$, o ile $a \leqslant x' < x \leqslant b$, gdyż wtedy $a < x + \theta h < b$ i czynnik $f'(x + \theta h)$ w (75) jest dodatni. O ile zaś pochodna jest ujemna, to czynnik $f'(x + \theta h)$ w (75) jest ujemny i $x' < x$ pociąga $f(x') > f(x)$

Wniosek II. Jeżeli pochodna funkcji w przedziale (m, n) *jest równa zeru, to funkcja jest stałą (w tym przedziale).* W rzeczy samej, niech x' i x należą do (m, n) i zapiszmy dla naszej funkcji wzór (75). Ponieważ pochodna $f'(x)$ równa się zeru dla każdej wartości x w (m, n), to w (75) czynnik $f'(x + \theta h) = 0$, i $f(x') - f(x) = 0$, t. j. $f(x') = f(x)$ dla każdej pary wartości x' i x w (m, n), a więc $f(x)$ ma w (m, n) wartość stałą, przyczem zawsze jedną i tę samą wartość. Trzeba zauważyć, że ten wniosek stosuje się tylko do takiej klasy funkcyj, które spełniają warunki, wymagane w założeniu twierdzenia na wartość średnią (a więc i Rolle'a). Tak, np., funkcja $f(x) = E(x)$ w każdym punkcie, gdzie pochodna istnieje, ma pochodną równą zeru. Jeżeli przedział (m, n) zawiera punkt o spółrzędnej całkowitej, to $E(x)$ nie jest stałą w (m, n), ale też przedział (m, n) zawiera punkt nieciągłości funkcji.

Wniosek III. Jeżeli dwie funkcje $\varphi(x)$ *i* $\psi(x)$ *mają tę samą pochodną w* (m, n), *to różnica ich jest liczbą stałą.* Jest to wniosek bezpośredni z wniosku II. Założeniem jest $\varphi'(x) = \psi'(x)$ w (m, n) Utwórzmy funkcję $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$; wtedy $f'(x) = \varphi'(x) - \psi'(x) = 0$, czyli $f'(x) = 0$ w (m, n), a więc na podstawie wniosku drugiego $f(x) = C^{te}$ stałej, czyli $\varphi(x) - \psi(x) = C$, czyli $\varphi(x) = \psi(x) + C$; odwrotnie,

dwie funkcje, których różnica jest stałą, mają, oczywiście, tę samą pochodną.

Przypuśćmy, np., że dane są funkcje: $y = \operatorname{Arc\,tg} x$ i $y = 2 \operatorname{Arc\,tg}(x - \sqrt{1+x^2})$; pochodną mają jednakową $y' = \frac{1}{1+x^2}$, a więc różnica tych funkcyj jest liczbą stałą; i rzeczywiście, $2 \operatorname{Arc\,tg}(x - \sqrt{1+x^2}) = \operatorname{Arc\,tg} x - \frac{\pi}{2}$. Weźmy jeszcze funkcje $y = \lg_e x$ i $y = \lg_k(-x)$; te dwie funkcje mają tę samą pochodną $y' = \frac{1}{x}$, ale nie możemy stąd wnioskować na podstawie naszych twierdzeń, że te dwie funkcje zóżnią się o liczbę stałą, bo pierwsza z nich jest określona tylko dla $x > 0$, a druga tylko dla $x < 0$, t. j. niema żadnego wspólnego przedziału (m, n), w którym istniałyby jednocześnie obie te funkcje. Przeciwnie, możemy przy pomocy tych dwóch funkcyj określić funkcję, istniejącą i ciągłą dla każdej wartości zmiennej x z wyjątkiem $x = 0$, i której pochodna równa się $\frac{1}{x}$; funkcją tą jest $y = \lg_e |x| = \frac{1}{2} \lg_e x^2$.

103. Jeżeli w przedziale (a, b) funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są ciągłe, jeżeli posiadają pochodne w (a, b),* jeżeli te pochodne nie stają się nigdy równe zeru dla tej samej wartości zmiennej x w (a, b),** i jeżeli np., $\psi(a) \neq \psi(b)$, to

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(b)} = \frac{\varphi'(a + \theta h)}{\psi'(a + \theta h)}, \tag{76}$$

gdzie $h = b - a, \quad 0 < \theta < 1.$

Utwórzmy funkcję $f(x) = \varphi(x) + \lambda \psi(x)$; można tak dobrać liczbę stałą λ, by $f(a) = f(b)$; w rzeczy samej,

---

* Pochodne funkcji $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ mogą nie istnieć w punktach a i b.

** W (a, b) z wyłączeniem punktów a i b. Tak, np., może być $\varphi(b) = \psi(b) = 0$.

mamy wtedy $\varphi(a)+\lambda\psi(a)=\varphi(b)+\lambda\psi(b)$; $\lambda\{\psi(b)-\psi(a)\}=$ $=\varphi(a)-\varphi(b)$; ponieważ $\psi(b)\neq\psi(a)$, więc

$$(77)\qquad \lambda=-\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)},$$

przy tej więc wartości λ mamy $f(a)=f(b)$; możemy więc do funkcji

$$f(x)=\varphi(x)+\lambda\psi(x)$$

zastosować twierdzenie Rolle'a. A więc w punkcie pośrednim $a<a+\theta h<b$ mamy $f'(a+\theta h)=0$; lecz $f'(x)=$ $=\varphi'(x)+\lambda\psi'(x)$, czyli

$$(78)\qquad \varphi'(a+\theta h)+\lambda\,.\,\psi'(a+\theta h)=0,$$

gdzie λ ma wartość daną przez (77). Nie może być $\psi'(a+\theta h)=0$, bo wtedy z (78) wynika, że i $\varphi'(a+\theta h)=0$, czyli funkcje $\varphi'(x)$ i $\psi'(x)$, wbrew założeniu, miałyby wspólny pierwiastek $x=a+\theta h$ w przedziale (a, b). Ponieważ więc $\psi'(a+\theta h)\neq 0$, więc (78) daje

$$(79)\qquad \lambda=-\frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)}$$

z równości (77) i (79) wynika (76), co trzeba było otrzymać.

Uogólnione twierdzenie na wartość średnią czyli twierdzenie Taylora.

Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ posiada w (a, b) pochodną aż do n^{go} rzędu włącznie, niech x należy do (a, b) i utwórzmy funkcję

$$(80)\qquad \varphi(x)=f(b)-f(x)-\frac{b-x}{1!}\,.\,f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}\,.\,f''(x)-$$
$$-\frac{(b-x)^3}{3!}f'''(x)-\,..\,-\frac{(b-x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x).$$

Możemy sprawdzić, że ta funkcja spełnia warunek $\varphi(b)=0$; oprócz tego jest ciągła w (a, b) i posiada w (a, b) pochodną pierwszego rzędu, która się równa

$$\varphi'(x)=-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x).$$

Jako funkcję $\psi(x)$ wybierzemy $\psi(x) = (b-x)^p$, gdzie p jest to liczba całkowita dodatnia, i zastosujmy do funkcji $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ twierdzenie poprzedniego rozdziału, t. j. wzór (76); tu $\psi(a) = (b-a)^p \neq 0$, $\psi(b) = 0$ i $\psi(a) \neq \psi(b)$; dalej funkcja $\psi'(x)$ nie równa się zeru dla żadnej wartości x z wyjątkiem $x = b$, bo $\psi'(x) = -p(b-x)^{p-1}$. Warunki stosowalności wzoru (76) są więc spełnione

$$\varphi(b) - \varphi(a) = -\varphi(a)$$
$$\psi(b) - \psi(a) = -(b-a)^p,$$

tak więc

$$\frac{\varphi(a)}{(b-a)^p} = \frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)},$$

czyli

$$\varphi(a) = \frac{(b-a)^p (b-a-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!\, p(b-a-\theta h)^{p-1}} f^{(n)}(a+\theta h),$$

gdzie $h = b - a$; a więc

(81) $$\varphi(a) = \frac{(b-a)^n (1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h);$$

lecz z (80) wynika:

(82) $$\varphi(a) = f(b) - f(a) - \frac{(b-a)}{1!} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \dots$$
$$\dots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a).$$

Przyrównując wartości $\varphi(a)$ z (81) i z (82), otrzymujemy żądany wzór. Pisząc x na miejsce a, $x+h$ na miejsce b, h na miejsce $b-a$, otrzymamy

(83) $$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$
$$\dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)} + R_n;$$

wyraz R_n nazywa się resztą; $R_n = \dfrac{h^n.(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\, p} f^{(n)}(x+\theta h)$;

(gdzie $0 < \theta < 1$).

Jeżeli uczynimy $p=n$, to otrzymamy resztę R_n w postaci danej przez Lagrange'a.

$$R=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h).$$

Jeżeli zaś podstawimy $p=1$, to otrzymamy resztę:

$$R_n=\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

którą nazywamy resztą Cauchy'ego.

105. *Maximum i Minimum.*

Określenie. Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ jest określona w przedziale (m, n). Mówimy, że w punkcie x_0 tego przedziału funkcja nasza posiada (albo przybiera) maximum, jeżeli istnieje takie otoczenie obustronne punktu x_0, że wszystkie rzędne w tem otoczeniu są mniejsze od rzędnej w punkcie x_0; czyli gdy nierówność $x_0-\eta<x<x_0+\eta$ pociąga nierówność

$$f(x)<f(x_0), \text{ o ile } x \neq 0.$$

Jeżeli zaś istnieje takie otoczenie obustronne punktu x_0, że wszystkie rzędne w tem otoczeniu są mniejsze od rzędnej punktu x_0, czyli gdy nierówność

$$x_0-\eta<x<x_0+\eta$$

pociąga za sobą nierówność

$$f(x)>f(x_0), \text{ o ile } x \neq x_0,$$

to mówimy, że funkcja osiąga minimum w tym punkcie x_0. Ponieważ $x_0-\eta$ i $x_0+\eta$ muszą należeć do przedziału (m, n), w którym funkcja jest określona, punkt x_0 musi być punktem *wewnętrznym* przedziału (m, n).

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale (m, n), to jako funkcja ciągła osiąga wartość najmniejszą (największą) przynajmniej w jednym jakimś punkcie ξ przedziału (a, b). Jeżeli punkt ξ jest punktem wewnętrznym przedziału (a, b), to jedno z dwojga, albo w dostatecznie

małem otoczeniu punktu ξ wszystkie rzędne są mniejsze (większe) od rzędnej w punkcie ξ i wtedy w punkcie ξ mamy maximum (minimum), albo też w dowolnie małem otoczeniu punktu ξ istnieją rzędne, równe rzędnej w punkcie ξ; wtedy nie mamy w punkcie ξ maximum (albo minimum) w tem znaczeniu, jakie nadaliśmy tym terminom przed chwilą w określeniu; to ma miejsce, np., gdy funkcja w pewnym przedziale, stanowiącym część przedziału (m, n) ma wartość stałą, albo np., dla funkcji $f(x) = x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$, gdy $x \neq 0$ i $f(0) = 0$, gdy punkt ξ jest punktem początkowym 0.

Wreszcie może się zdarzyć, że punkt ξ jest jednym z dwóch punktów m albo n.

Jeżeli w punkcie x_0 jest minimum, to $f(x)$ jest większe od wartości funkcji w pewnem otoczeniu punktu x_0, ale nie znaczy to wcale, by $f(x_0)$ było większe od wszystkich wartości funkcji w przedziale (m, n); dlatego może się zdarzyć, że w punkcie x_0 mamy maximum funkcji, w punkcie x_1 mamy minimum, a pomimo to $f(x_1) > f(x_2)$, t. j. minimum jest większe od maximum.

Na maxima i minima używamy nieraz jednej wspólnej nazwy, mianowicie extremum, w liczbie mnogiej extrema. Twierdzenie, wyrażające *warunek konieczny (ale nie dostateczny) istnienia extremum:*

Jeżeli funkcja posiada pochodną w (m, n) i osiąga w pewnym punkcie x_0 maximum lub minimum, to pochodna w tym punkcie jest równa zeru.

Przypuśćmy, np., że w punkcie x_0 funkcja $f(x)$ osiąga maximum i że pochodna $f'(x_0)$ istnieje. Trzy są możliwości, co do $f'(x_0)$; albo $f'(x_0) > 0$. albo $f'(x_0) < 0$, albo wreszcie $f'(x_0) = 0$. Pierwsza z tych możliwości jest wykluczona, gdyż musiałby wtedy istnieć, na zasadzie twierdzenia 1[a]) (patrz l. 100), taki przedział $(x_0, x_0 + \eta)$, że dla $x_0 < x < x_0 + \eta$ $f(x) > f(x_0)$, co przeczy temu, że $f(x_0)$ jest maximum. Po-

dobnie niemożliwy jest przypadek drugi, gdyż wtedy dla $x_0 - \eta < x < x_0$ byłoby zawsze $f(x) > f(x_0)$, co znowu jest niemożliwe. Pozostaje więc tylko przypadek trzeci

$$f'(x_0) = 0.$$

Taki sam dowód stosuje się w przypadku, gdy funkcja w punkcie x_0 osiąga minimum.

Tak więc, by znaleźć extrema funkcji w (m, n), przyrównujemy pochodną do zera i szukamy pierwiastków równania $f'(x) = 0$ w (m, n). Zjawia się teraz pytanie, czy mamy extremum dla każdej wartości x, będącej pierwiastkiem równania $f'(x) = 0$. Odpowiedź jest przecząca. Możemy wykazać to na prostym przykładzie. Niech będzie dana funkcja

$$y = f(x) = x^3$$

pochodna $f'(x) = 3x^2$; pochodna ta równa się zeru dla $x = 0$, tak że $f'(0) = 0$. Pomimo to funkcja nasza $y = x^3$, oczywiście, nie posiada extremum w punkcie $x = 0$, gdyż na lewo od tego punktu jest ujemna, w punkcie $x = 0$ funkcja ma wartość zero, a na prawo od $x = 0$ funkcja jest dodatnia. Możemy tę funkcję wykreślić, i przekonamy się, że jest rosnąca w każdym przedziale.

Tak więc, *równość zeru pochodnej* w badanym punkcie jest warunkiem *koniecznym, ale niedostatecznym* istnienia *extremum* w tym punkcie.

Jeżeli pochodna w punkcie x_0 równa się zeru, ale istnieje takie otoczenie lewostronne tego punktu, w którem pochodna $f'(x)$ ma stale znak ujemny (dodatni), a takie otoczenie prawostronne tego punktu x_0, w którem pochodna jest stale dodatnia (ujemna), to w punkcie x_0 funkcja osiąga minimum (maximum).

W rzeczy samej, niech x' należy do wzmiankowanego lewostronnego otoczenia punktu x_0; ponieważ w otoczeniu punktu x' pochodna jest ujemna (dodatnia), więc funkcja

maleje (rośnie) i mamy $\lim\limits_{x' \to x_0} f(x') = f(x_0)$, wskutek czego $f(x') > f(x_0)$, ewentualnie $f(x') < f(x)$; jeżeli x'' należy do otoczenia prawostronnego punktu x_0, to pochodna w dostatecznie małem otoczeniu punktu x'' jest dodatnia (ujemna), więc funkcja rośnie (maleje) i mamy $\lim\limits_{x'' \to x_0} f(x'') = f(x)$, wskutek czego $f(x'') < f(x_0)$ ewentualnie $f(x'') > f(x_0)$. Tak więc mamy ostatecznie

$$f(x') > f(x_0) > f(x''),$$
$$(\text{ewentualnie } f(x') < f(x_0) < f(x'')),$$

gdzie x' jest dowolnym punktem pewnego lewostronnego otoczenia punktu x_0, a x'' jest dowolnym punktem pewnego otoczenia prawostronnego punktu x_0. Wnosimy stąd, iż w punkcie x_0 zachodzi minimum (maximum).

Jeżeli $f'(x_0) = 0$, ale istnieje otoczenie obustronne punktu x_0, w którem pochodna $f'(x)$ jest stale dodatnia (ujemna), to w punkcie x_0 funkcja $f(x)$ nie osiąga ani maximum, ani minimum. Albowiem wiemy (patrz l. 100, 4^a) i 4^b)), że funkcja $f(x)$ jest w otoczeniu punktu x_0 rosnąca (malejąca).

Przykłady. 1) $y = f(x) = x^n e^x$; $f'(x) = (x^n + nx^{n-1})e^x$; $= x^{n-1}(x+n) \cdot e^x$. Przypuśćmy, że n jest liczbą całkowitą, większą od jedności. Pochodna staje się zerem dla $x = 0$ i dla $x = -n$. Zbadajmy, czy punkt $x = 0$ daje extremum funkcji, czy też nie. Zależy to od liczby n; jeżeli liczba n jest parzysta, to czynnik x^{n-1} zmienia znak, gdy przechodzimy od lewej ku prawej stronie punktu $x = 0$, tak że $f'(x)$ jest ujemna z lewej strony, a dodatnia z prawej strony tego punktu. Mamy wtedy w punkcie $x = 0$ minimum funkcji $f(x)$. Jeżeli zaś n jest liczbą nieparzystą, to x^{n-1} nie zmienia znaku przy przejściu od lewej ku prawej stronie punktu $x = 0$ (znak jest dodatni), nie mamy wtedy ani maximum, ani minimum, funkcja

$f(x)$ rośnie w otoczeniu punktu $x=0$. Przejdźmy teraz do punktu $x=-n$; funkcja pochodna zmienia znak przy przejściu przez ten punkt od lewostronnego do prawostronnego otoczenia, mamy więc zawsze w tym punkcie extremum. Przytem, jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to pochodna z lewej strony punktu $x=-n$ jest ujemna, a z prawej dodatnia, a więc mamy minimum. Jeżeli n jest liczbą parzystą, to sprawa ma się wprost przeciwnie i dlatego mamy w punkcie $x=-n$ maximum. Wartość tego extremum wynosi $f(-n)=(-n)^n e^{-n}=(-1)^n \frac{n^n}{e^n}=(-1)^n\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

2) $y=f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ dla $x \neq 0$ i $f(0)=0$. Funkcja w ten sposób określona jest ciągła dla każdej wartości x. W punkcie $x=0$, mamy, np., $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}=0$, czyli $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Przejdźmy do pochodnej; pochodną w punkcie $x=0$ jest $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot e^{-\frac{1}{h^2}}=0$; wystarczy bowiem wziąć $\frac{1}{h^2}=z$, wtedy $\frac{1}{h}e^{-\frac{1}{h}}=\frac{\sqrt{z}}{e^z}$; gdy $h\to 0$, $z\to+\infty$; wiemy (patrz l. 31), że $\frac{e^z}{z}\to+\infty$, gdy $z\to+\infty$, przybierając wartości ciągu naturalnego; lecz funkcja $\frac{e^x}{x}$ jest rosnącą dla $x>1$. jak widać ze znaku pochodnej; a więc $\frac{e^z}{z}$ dąży do $+\infty$, gdy $z\to+\infty$ w sposób dowolny; $\frac{e^z}{\sqrt{z}}=\frac{e^z}{z}\cdot\sqrt{z}$; więc i $\frac{e^z}{\sqrt{z}}\to+\infty$, gdy $z\to+\infty$; stąd $\frac{\sqrt{z}}{e^z}\to 0$, a więc i $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}e^{-\frac{1}{h^2}}=0$, czyli $f'(0)=0$. Jeżeli teraz $x\neq 0$, to

$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$; pochodna jest ciągła w punkcie $x = 0$, gdyż można udowodnić, że $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = 0$. Z lewej strony punktu $x = 0$, t. j. dla $x < 0$, $f'(x) < 0$; z prawej strony, t. j. dla $x > 0$, $f'(x) > 0$. Wnosimy stąd, że w punkcie $x = 0$ funkcja $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ posiada minimum.

Zamiast badać znak pochodnej w otoczeniu punktu x_0, w którym $f'(x_0) = 0$, możemy zbadać pochodną drugą w tym punkcie. Jeżeli $f''(x_0) > 0$, to wartości funkcji pochodnej $f'(x)$ są w otoczeniu lewostronnem punktu x_0 mniejsze od $f'(x_0) = 0$, czyli ujemne, a w otoczeniu prawostronnem większe od $f'(x_0)$, czyli dodatnie, (patrz l. 100, twierdzenie 1^a)). Funkcja $f'(x)$ z lewej strony punktu x_0 jest ujemna, z prawej dodatnia, a więc funkcja $f(x)$ osiąga w punkcie x_0 minimum.

Jeżeli $f''(x_0) < 0$, to wartości $f'(x)$ są w otoczeniu lewostronnem punktu x_0 większe od $f'(x_0) = 0$, czyli dodatnie, a w otoczeniu prawostronnem tego punktu są mniejsze od $f'(x_0) = 0$, czyli ujemne; wobec tego w punkcie x_0 mamy maximum funkcji $f(x)$.

Jeżeli $f''(x_0) = 0$, to przy pomocy wartości pochodnej drugiej w punkcie x_0 nie możemy rozstrzygnąć, czy w punkcie x_0 jest extremum, czy nie. Trzeba się zwrócić do wartości pochodnej trzeciej w tym punkcie.

Przypuśćmy, że $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, ale $f'''(x_0) \neq 0$, np., $f'''(x_0) > 0$. Na mocy twierdzeń 1^a) i 1^b) z rozdziału l. 100, możemy napisać:

na lewo od punktu x_0; t. j. dla $x_0 - \eta < x < x_0$ mamy $f''(x) < f''(x_0)$,

na prawo od punktu x_0, t. j. dla $x_0 < x < x_0 + \eta$ mamy $f''(x) > f''(x_0)$;

ponieważ $f''(x_0) = 0$, więc $f''(x) < 0$ w pierwszym przy-

padku, a $f''(x) > 0$ w drugim. Od $f''(x)$ przejdźmy do $f'(x)$; z tego, iż $f''(x) < 0$ z lewej strony punktu x_0, wynika, że $f'(x)$ jest funkcją malejącą zmiennej x na lewo od x_0; z tego, że $f''(x) > 0$ po prawej stronie punktu x_0, wynika, że $f'(x)$ jest funkcją rosnącą zmiennej x na prawo od x_0; ponieważ $f'(0) = 0$, więc $f'(x) > 0$ w obustronnem otoczeniu punktu x_0, a więc funkcja $f(x)$ nie osiąga w punkcie x_0 extremum. Gdyby $f'''(x_0) < 0$, to, rozumując jak poprzednio, otrzymalibyśmy $f'(x) < 0$ w obustronnem otoczeniu punktu x_0, a więc także nie byłoby extremum.

Pozostaje przypadek, gdy i $f'''(x_0) = 0$. Wtedy, o ile istnieje czwarta pochodna, bierzemy pod uwagę wartość $f^{(IV)}(x_0)$.

Jeżeli $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, lecz $f^{(IV)} \neq 0$, wtedy $f(x_0)$ jest extremum, mianowicie jest minimum, albo maximum, zależnie od tego, czy $f^{(IV)}(x_0) > 0$, czy też $f^{(IV)}(x_0) < 0$.

Związek między $f^{(IV)}(x_0)$ i $f'(x)$ jest taki sam, jak między $f'''(x)$; widzieliśmy, że jeżeli $f'''(x) > 0$, to $f(x)$ przechodzi od wartości ujemnych na lewo, do wartości dodatnich na prawo; a więc z $f^{(IV)}(x) > 0$ wynika, że $f'(x) < 0$ na lewo, a $f'(x) > 0$ na prawo od x_0; a więc w takim razie mamy w punkcie x_0 minimum.

W ten sam sposób można udowodnić, że w przypadku, gdy $f^{(IV)}(x_0) < 0$, to $f(x)$ jest maximum.

Ten łańcuch twierdzeń da się przedłużyć dowolnie. Za pomocą indukcji matematycznej możemy uzasadnić następujace prawo ogólne:

Jeżeli w otoczeniu punktu x_0 istnieją pochodne funkcji $f(x)$, aż do pochodnej $(n-1)$ rzędu i oprócz tego istnieje pochodna n^{go} rzędu w punkcie x_0; jeżeli

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0, \dots,\ f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ lecz } f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

to, gdy liczba n (rząd pierwszej nieznikającej* w punkcie x_0 pochodnej) *jest liczbą parzystą, wtedy mamy w punkcie x_0 extremum; minimum, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$, maximum, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Gdy liczba n jest liczbą nieparzystą, to w punkcie x_0 niema ani maximum ani minimum.

Tylko co wysłowione twierdzenie można udowodnić przy pomocy twierdzenia Taylora. Przypuśćmy, że warunki założenia są spełnione, wtedy, jeżeli $|h| < \delta$, gdzie liczba δ jest tak dobrana, by przedział $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ należał do otoczenia, w którym istnieją pochodne funkcji $f(x)$ aż do rzędu $(n-1)$ włącznie, będą spełnione wszystkie warunki wymagane, by zastosować wzór (83) na szereg Taylora z zamianą liczby n na $n-1$. Ponieważ wyrazy $h\frac{f'(x_0)}{1}, \ldots, \frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(x_0)$ równają się zeru, więc pozostaje

$$f(x_0 + h) = \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0 + \theta h) + f(x_0), \text{ czyli}$$

(84) $$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(x_0 + \theta h),$$

gdzie $0 < \theta < 1$.

O ile $|h|$ jest dostatecznie małe i $h \neq 0$, to czynnik $f^{(n-1)}(x_0 + \theta h)$ zmienia znak wraz z liczbą h, gdyż

$$f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ a } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Stąd wniosek, że lewa strona we wzorze (84) zachowuje znak stały, albo zmienia znak na przeciwny ze zmianą znaku liczby h, zależnie od tego, czy n jest liczbą parzystą czy nieparzystą.

Jeżeli n jest liczbą *parzystą*, mamy więc zawsze $f(x_0 + h) < f(x_0)$ lub zawsze $f(x_0 + h) > f(x_0)$ dla każdej wartości h w otoczeniu $h = 0$, t. j. dla $-\eta < h < 0$ i dla

* Mówimy, że funkcja $\varphi(x)$ znika w punkcie x_0, jeżeli $\varphi(x_0) = 0$.

$0 < h < \eta$, gdzie $\eta > 0$, zależnie od tego, czy $f^{(n)}(x_0) < 0$, czy też $f^{(n)}(x_0) > 0$; bo gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, to $f^{(n-1)}(x_0 + \theta h)$ zmienia znak wraz ze zmianą znaku h jak $-h$, a gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$, to $f^{(n-1)}(x_0 + \theta h)$ zmienia znak, wraz ze zmianą znaku h jak h, tak iż w pierwszym przypadku $f(x_0 + h) - f(a_0)$ w (84) tak się zachowuje pod względem znaku, jak $-h^{2p}$, a w drugim przypadku, jak h^{2p}, czyli w pierwszym przypadku różnica $f(x_0 + h) - f(x_0)$ jest stale ujemna, a w drugim przypadku stale dodatnia. Tak więc przy naszych założeniach $f^{(n)}(x_0) < 0$, pociąga istnienie maximum funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, a $f^{(n)}(x_0) > 0$ pociąga minimum.

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to różnica $f(x_0 + h) - f(x_0)$ zmienia znak wraz ze zmianą znaku h, czyli nie mamy w punkcie x_0 ani maximum ani minimum.

Przykład:

$$y = f(x) = x - \sin x + 1;$$

pochodna $f'(x) = 1 - \cos x$, $f''(x) = \sin x$, $f'''(x) = \cos x$, w punkcie $x = 0$, $f'(0)$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 1$.

Pierwsza pochodna, nie równa zeru, jest rzędu n nieparzystego, $n = 3$, więc funkcja $y = x \sin x + 1$ niema w punkcie $x = 0$ ani maximum ani minimum.

$$y = f(x) = e^x + \sin x + \cos x - 2x - 2$$

$$y' = e^x + \cos x - \sin x - 2; \quad y'' = e^x - \sin x - \cos x;$$

$$y''' = e^x - \cos x + \sin x, \quad y^{\mathrm{IV}} = e^x + \sin x + \cos x;$$

$$f'(0) = 0, \; f''(0) = 0, \; f'''(0) = 0, \; f^{\mathrm{IV}}(0) = 2.$$

Tutaj n jest liczbą parzystą, $n = 4$: $f^{\mathrm{IV}}(0) > 0$, więc zachodzi w punkcie $x = 0$ minimum.

106. *Zastosowanie pochodnych do obliczania niektórych granic.*

Dzięki twierdzeniom udowodnionym poprzednio, możemy w wielu wypadkach znaleźć granice, do których dążą niektóre funkcje dla $x \to a$, gdy poprzednio podane (l. 000) sposoby zawodzą, a bezpośrednie podstawienie

w miejsce zmiennej x liczby a nic nie daje, z powodu nieciągłości funkcji dla $x=a$, która przejawia się już chociażby w tem, że formalne podstawienie w miejsce zmiennej x liczby a daje wyrażenie, pozbawione wszelkiego sensu, jako zawierające dzielenie np., przez zero, lub zero do potęgi zero.

Rozpatrywać będziemy funkcje, które się wyrażają w sposób następujący:

1) $y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, przyczem, gdy $x \to a$, to $\varphi(x) \to 0$ i $\psi(x) \to 0$; mamy $\varphi(0)=0$, $\psi(0)=0$, bo zakładamy, że funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są ciągłe i posiadają pochodne.

2) $y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, przyczem, gdy $x \to a$, to $\varphi(x) \to \infty$, $\psi(x) \to \infty$.

3) $y=\varphi(x).\psi(x)$; gdy $x \to a$, $\varphi(x) \to 0$, $\psi(x) \to \infty$.

4) $y=\varphi(x)+\psi(x)$; gdy $x \to a$, to $\varphi(x) \to +\infty$, $\psi(x) \to -\infty$.

5) $y=\{\varphi(x)\}^{\psi(x)}$; gdy $x \to a$, $\varphi(x) \to 0$, $\psi(x) \to 0$.

6) $y=\{\varphi(x)\}^{\psi(x)}$; gdy $x \to a$; $\varphi(x) \to 1$, $\psi(x) \to \infty$.

7) $y=\{\varphi(x)\}^{\psi(x)}$; gdy $x \to a$, $\varphi(x) \to \infty$, $\psi(x) \to 0$.

Wzory te, dla $x=a$ żadnej wartości liczbowej nie wyznaczają, gdyż w przypadku gdy $\varphi(x) \to 0$ lub $\psi(x) \to 0$, mamy $\varphi(0)=0$, $\psi(0)=0$: w przypadku, gdy $\varphi(x) \to \infty$, albo $\psi(x) \to \infty$, przyjmujemy, że $\varphi(a)$ i $\psi(a)$ nie są określone. Tych siedm przypadków oznaczamy symbolicznie znakami: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty.0$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0. Pięć ostatnich przypadków można sprowadzić do dwóch pierwszych; np., w trzecim wystarczy zamiast $\psi(x)$ wprowadzić $\psi_1(x)=\frac{1}{\psi(x)}$, wtedy $\psi_1(x) \to 0$, a y jest ilorazem: $\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}$; w przypadku

czwartym przekształcamy y na iloczyn $\varphi(x)\left\{1+\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right\}$; w 5^{ym}, 6^{ym} i 7^{ym} szukamy granicy $\lg y$ lub $\lg(-y)$.

Twierdzenie L'Hospital'a.

Przypuśćmy, że $\varphi(x)\to 0$, $\psi(x)\to 0$ lub $\varphi(x)\to\infty$, $\psi(x)\to\infty$, gdy $x\to a$, lub gdy $x\to+\infty$; jeżeli pochodne $\varphi'(x)$ i $\psi'(x)$ istnieją w otoczeniu punktu a (ale nie niekonecznie w samym punkcie a), gdy $x\to a$, albo dla $x>l$, gdy $x\to\infty$, i *jeżeli istnieje granica* $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, gdy $x\to a$, lub gdy $x\to+\infty$, *to istnieje granica* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ i granica ta *równa* się granicy $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, z tem zastrzeżeniem, że pochodne $\varphi'(x)$ i $\psi'(x)$ nie stają się równe zeru przy tej samej wartości zmiennej w otoczeniu punktu $x=a$, gdy chodzi o granicę dla $x\to a$, gdy chodzi o granicę dla $x\to a$, albo nie mają dowolnie wielkich wspólnych pierwiastków, gdy chodzi o granicę dla $x\to+\infty$.

Przypuśćmy, że $\varphi(x)\to 0$, $\psi(x)\to 0$, gdy $x\to a$. Możemy zastosować tutaj twierdzenie, udowodnione poprzednio (l. 103), ponieważ wszystkie warunki, wymagane przy stosowaniu twierdzenia, są, jak łatwo sprawdzić, spełnione. Wzór (76), w którym $b=x$, daje

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(a+h\theta)}{\psi'(a+h\theta)},$$

gdzie $$h=x-a,\quad 0<\theta<1;$$

lecz w tym przypadku $\varphi(a)=0$, $\psi(a)=0$; mamy więc

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(a+h)}{\psi'(a+h)}. \tag{85}$$

gdy $x\to a$, $h\to 0$, $a+\theta h\to a$; lecz według założenia $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ istnieje, a więc istnieje i ma tę samą wartość

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)}$; z istnienia granicy po stronie prawej dla $x\to a$, wynika istnienie granicy dla strony lewej, a więc

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

czyli

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}, \tag{86}$$

o ile granica po stronie prawej istnieje.

Przypuśćmy teraz, że $\varphi(x)\to 0$, $\psi(x)\to 0$, gdy $x\to+\infty$.

Wprowadźmy nową zmienną $t=\dfrac{1}{x}$; gdy $x\to\infty$, $t\to 0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_1(t)}{\psi_1(t)};\quad \text{gdzie}\quad \varphi_1(t)=\varphi\left(\frac{1}{t}\right);$$

$\psi_1(t)=\psi\left(\dfrac{1}{t}\right)$; według tylko co udowodnionego, jeżeli istnieje $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varphi'_1(t)}{\psi'_1(t)}$, to szukana granica $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ jest właśnie $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varphi'_1(t)}{\psi'_1(t)}$; lecz $\varphi'_1(t)=-\dfrac{1}{t^2}\varphi'\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $\psi'_1(t)=-\dfrac{1}{t^2}\psi'\left(\dfrac{1}{t}\right)$,

tak iż

$$\frac{\varphi'_1(t)}{\psi'_1(t)}=\frac{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{t}\right)}\quad \text{i}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi'_1(t)}{\psi'_1(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Tak więc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

o ile granica po stronie drugiej istnieje.

To samo stosuje się, oczywiście, w przypadku, gdy $x \to -\infty$.

Pozostaje do udowodnienia twierdzenie L'Hospital'a w przypadku, gdy $\varphi(x) \to \infty$ i $\psi(x) \to \infty$.

Ponieważ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = l$, więc można do liczby $\varepsilon > 0$ dobrać taką liczbę a, że $x > a$ pociąga

$$l - \varepsilon < \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} < l - \varepsilon.$$

W ten sposób ustaliwszy a, zastosujemy wzór (76), który napiszemy w postaci

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1 - \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{\psi(a)}{\psi(x)}} = \frac{\varphi'(a + \theta h)}{\psi'(a + \theta h)},$$

(87) czyli
$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{1 - \dfrac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1 - \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(x)}} \cdot \frac{\varphi'(a + \theta h)}{\psi'(a + \theta h)};$$

ponieważ $a + \theta h > a$, więc

$$l - \varepsilon < \frac{\varphi'(a + \theta h)}{\psi'(a + \theta h)} < l + \varepsilon;$$

ponieważ

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1 - \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(x)}} = 1, \quad (a \text{ jest liczbą stałą}),$$

więc można dobrać taką liczbę $x_0 > a$, że $x > x_0$ pociąga

$$1-\varepsilon < \frac{1-\dfrac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1-\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(x)}} < 1+\varepsilon,$$

a więc, ze wzoru (87) wynika

$$(l-\varepsilon)(1-\varepsilon) < \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} < (l+\varepsilon)(1+\varepsilon);$$

Ponieważ liczba ε jest dowolnie mała, więc granica $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, gdy $x \to a$, istnieje i równa się l; czyli:

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

W przypadku, gdy $\varphi(x) \to \infty$, $\psi(x) \to \infty$, gdy $x \to +\infty$, (albo $x \to -\infty$) i gdy istnieje $\lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, to stosujemy zmianę zmiennej x na zmienną t zapomocą podstawienia $x = \frac{1}{t}$; gdy $x \to \infty$, $t \to 0$.

Przykłady: 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1;$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x + \sin x}{2 \sin x \cos x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + \sin x + \cos x}{2(\cos^2 x - \sin^2 x)} = 1;$ jak widać z tego przykładu, otrzymujemy granicę przez parokrotne stosowanie twierdzenia L'Hospital'a. Ma to miejsce wtedy, gdy liczby $\varphi'(a)$ i $\psi'(a)$ znowu równają się zeru, albo nie istnieją; lecz jeżeli $\lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ istnieje, stajemy znowu wobec takiego samego zadania o wyznaczeniu granicy, jakie mieliśmy zamiar rozwiązać; jeżeli warunki stosowalności są spełnione, możemy przejść do stosunku pochodnych drugich, w razie potrzeby do stosunku pochodnych trzecich i t. d.

3) Znaleźć $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\mu e^{-x}$; gdy $\mu \leqslant 0$, to szukaną granicą jest zero, gdyż oba czynniki x^n i e^{-x} dążą do zera; jeżeli $\mu > 0$, to pierwszy czynnik dąży do $+\infty$, drugi do zera, możemy więc spróbować zastosować wzór L'Hospital'a.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{e^x} = \mu \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu-1}}{e^x} = \mu(\mu-1)\lim\frac{x^{\mu-2}}{e^x} = \ldots$$

$$\ldots = \mu(\mu-1(\mu-2)\ldots(\mu-n)\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\mu-n}}{e^x} = \lim(x^{\mu-n})\lim e^{-x} = 0;$$

n jest liczbą całkowitą, większą od wykładnika μ, tak że $\mu - n < 0$ i $\lim x^{\mu-n} = \lim\frac{1}{x^{n-\mu}} = 0$.

Stąd wniosek następujący: niech $\mu > 0$ oznacza liczbę dowolnie wielką; można wyznaczyć taką liczbę x_0, że $x > x_0$ pociąga $e^x > x^\mu$; jeżeli $P(x)$ jest wielomianem względem zmiennej x, a $\varepsilon > 0$ dowolnie małą liczbą, można znaleźć taką liczbę x_0, że $x > x_0$ pociąga $|P(x)| . e^{-x} < \varepsilon$.

Stąd także wynika wniosek, że $(\lg x)^\mu \to 0$, gdy $x \to \infty$; wystarczy w $\frac{x^\mu}{e^x}$ podstawić $x = \lg z$, $z = e^x$, wtedy $\frac{x^\mu}{e^x} = \frac{(\lg z)^\mu}{z}$; gdy $x \to +\infty$, $z \to \infty$; $\frac{(\lg z)^\mu}{z}$ dąży, gdy $z \to +\infty$, do tej samej granicy, co i $\frac{x^\mu}{e^x}$ dla $x \to +\infty$.

Do tego samego dojść można przez bezpośrednie zastosowanie twierdzenia L'Hospital'a do $\frac{(\lg x)^\mu}{x}$; w rzeczy samej $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\lg x)^\mu}{x} = \mu\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\lg x)^{\mu-1}}{x} = \ldots = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots$

$$\ldots(\mu-n+1)\lim_{x\to+\infty}\frac{(\lg x)^{\mu-n}}{x};$$

jeżeli $n > \mu$, to $\lim\frac{(\lg x)^{\mu-n}}{x} = \lim\frac{1}{x(\lg x)^{n-\mu}} = 0$.

Stąd znowu wniosek, że

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\lg x}{x^\alpha}=0,$$ dla każdej wartości wykładnika $\alpha>0$, a następnie, że $\lim\limits_{x\to0}x^\alpha.\lg x=0$; w rzeczy samej, niech

$$x=\frac{1}{z},\ \lg x=-\lg z,\ x^{-\alpha}=z^\alpha,\ x^\alpha.\lg x=-z^{-\alpha}\lg z=-\frac{\lg z}{z^\alpha};$$

$$\lim_{x\to0}x^\alpha.\lg x=-\lim_{z\to+\infty}\frac{\lg z}{z^\alpha}=0.$$

4) Znaleźć $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$; $\{a, b, c, d\neq0,\ c\neq d\}$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}=\lim_{x\to0}\frac{a^x\lg a-b^x\lg b}{c^x\lg c-d^x\lg d}=\frac{\lg\dfrac{a}{b}}{\lg\dfrac{c}{d}}.$$

5) $$\lim_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}x}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{2}x=\frac{2}{\pi}.$$

6) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{\lg x}}$; znaleźć $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lg f(x)=\dfrac{\lg(1+x)}{\lg x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\lg f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=e$, (ciągłość funkcji logarytmowej!).

7) $f(x)=x^{\frac{1}{1-x}}$; znaleźć $\lim\limits_{x\to0}f(x)$; $\lg f(x)=\dfrac{\lg x}{1-x}$;

$$\lim_{x\to1}\lg f(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{-x}=-1\ \lim f(x)=\frac{1}{e}.$$

8) $f(x)=\left(\cos\sqrt{\dfrac{2a}{x}}\right)^x$; znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$; $\lg f(x)=$

$$=x\lg\cos\sqrt{\frac{2a}{x}}=\frac{\lg\cos\sqrt{\dfrac{2a}{x}}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\lg\cos\sqrt{2az}}{z}=$$

$$= -\lim_{z\to 0}\frac{a\,.\,\mathrm{tg}\sqrt{2az}}{\sqrt{2az}} = -a;\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{-a}.$$

Uwaga. Jeżeli nie istnieje granica stosunku pochodnych $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, to stąd nie wynika wcale, że nie istnieje granica $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; jeżeli istnieje granica dla $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, to istnieje granica $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, a nie odwrotnie, oto jest treść udowodnionego poprzednio twierdzenia. Pod tym względem pouczający jest następujący przykład: $f(x) = \frac{x+\sin x}{x}$; znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$; gdybyśmy utworzyli stosunek pochodnych, to otrzymalibyśmy $1+\cos x$, funkcję, która dla $x\to\infty$ nie posiada granicy, (waha się między 0 i 2); tymczasem $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x} = = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$. Można to sobie wyjaśnić w następujący sposób; niech $\varphi(x) = x+\sin x$; $\psi(x) = x$; $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$.

Na mocy (76), które mamy najzupełniej prawo tutaj zastosować

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x)}{\psi(x)-\psi(x)} = \frac{\varphi'(\theta\,.\,x)}{\psi'(\theta\,.\,x)},\ \text{czyli}$$

$$\frac{x+\sin x}{x} = 1+\cos(\theta x);\quad 0<\theta<1;$$

gdy $x\to\infty$, to lewa strona poprzedniej równości dąży do jedności, a więc do jedności musi dążyć i druga strona, czyli $\lim\limits_{x\to\infty}\cos(\theta\,.\,x) = 0$. Otóż to jest zupełnie możliwe, pomimo, że $\cos x$ nie dąży do żadnej granicy, gdy $x\to+\infty$, ponieważ θ jest funkcją zmiennej x, tak że iloczyn $\theta\,.\,x$, gdy x dąży do nieskończoności przybiera właśnie takie wartości, których cosinus dąży do zera.

107. *O małych różnego rzędu.*

Określenie. 1) Jeżeli mamy dwie zmienne u i v, które są tak związane ze sobą, że $u \to 0$, gdy $v \to 0$, to zmienne u i v są tego samego rzędu, o ile $\lim \frac{u}{v}$ istnieje i równa się pewnej liczbie $A \neq 0$.

Zmienna u może być bezpośrednio funkcją zmiennej v, albo też obie są funkcjami tej samej zmiennej niezależnej, np. x.

Funkcję, która zdąża do zera w pewnem miejscu nazywamy krótko (nieskończenie) małą (w tem miejscu); tak, gdy x dąży do zera, x^2, x^3,... są (nieskończenie) małe; gdy $x \to a$, to $x-a$, $(x-a)^2$, $e^x - e^a$,... są (nieskończenie) małemi; tak samo $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$,... gdy $x \to +\infty$ albo gdy $x \to -\infty$. Stąd widzimy, że nieskończenie mała nie jest liczbą lecz funkcją, zdążającą w danem miejscu do zera.

2) Przyjąwszy zmienną v jako zasadniczą, nazwiemy ją małą pierwszego rzędu, v^2 małą drugiego rzędu, v^3 małą trzeciego rzędu, i t. d., v^n małą n^{go} rzędu. Stąd wynika na zasadzie pierwszego określenia, że mała u jest rzędu n, jeżeli

$$\lim \frac{u}{v^n} = A \neq 0.$$

Z określenia wynika, że zmienna u nie może być względem małej v jednocześnie rzędu n i m ($n \neq m$), czyli, jeżeli v posiada jakiś rząd, to jest on określony jednoznacznie (dlaczego?).

Jeżeli $u \to 0$, gdy $x \to 0$, to przyjmujemy zazwyczaj zmienną niezależną x za małą pierwszego rzędu, x^2 drugiego i t. d.

Jeżeli $u(x) \to 0$, gdy $x \to a$ to przyjmujemy $v = (x-a)$, jako małą pierwszego rzędu, $(x-a)^2$ jako małą drugiego rzędu i t. d.

Jeżeli $u(x) \to 0$, gdy $x \to +\infty$ albo do $-\infty$, to przyjmujemy $v = \frac{1}{x}$ jako małą pierwszego rzędu, $\frac{1}{x^2}$ jako małą drugiego rzędu i t. d.

Możemy, oczywiście, wprowadzić i rzędy ułamkowe; jeżeli $x \to 0$ i jest małą pierwszego rzędu, to $x^{1/2}$ będzie małą rzędu $\frac{1}{2}$, wogóle x^α, gdzie $\alpha > 0$, małą rzędu α.

Mamy przed sobą dwa zagadnienia pierwszorzędnej wagi, mianowicie: 1) Jeżeli $u(x)$ i $v(x)$ dążą do zera, gdy $x \to a$, lub do ∞, i jeżeli $v(x)$ przyjmiemy za małą pierwszego rzędu, czy $u(x)$ posiada określony rząd, t. j. czy można dobrać taką liczbę rzeczywistą α, by stosunek $\frac{u(x)}{\{v(x)\}^\alpha}$ zmierzało do określonej granicy, różnej od zera. Jest to sprawa porównywalności dwóch nieskończenie małych na zasadzie poprzednio wyłożonych określeń. W szczególności powstaje pytanie takie: $u(x) \to 0$, gdy $x \to a$; czy zawsze dobrać można taki wykładnik α, by granica

$$\lim \frac{u(x)}{(x-a)^\alpha}$$

istniała i była różna od zera.

Łatwo udowodnić, że odpowiedź na pytanie jest przecząca. Wystarczy, np., wziąć pod uwagę funkcję $u = x \sin\frac{1}{x}$, $v = x$; łatwo się przekonać, że nie można dobrać takiej liczby α, by $\frac{u}{v^\alpha}$ posiadało granicę skończoną, różną od zera; tutaj stosunkiem $\frac{u}{v}$, gdy $x \to 0$ jest $\sin\frac{1}{x}$, który waha się między -1 a 1 i nie zmierza do żadnej granicy. Można byłoby w takim razie rozszerzyć poprzednie określenia i uznać, że dwie nieskończenie małe są tego samego rzędu, jeżeli ich stosunek jest ograniczony, gdy $x \to a$ lub do ∞, t. j.

$$\delta_1 < \frac{u}{v} < \delta_2$$

w otoczeniu punktu a, gdy $x \to a$ i dla wszystkich wartości $x > x_0$ (otoczenie punktu w nieskończoności) gdy $x \to +\infty$.

Łatwo się jednak przekonać, że takie rozszerzenie poprzednich określeń nie zmieni sprawy; będą istniały w dalszym ciągu nieskończenie małe, nieporównywalne między sobą.

Gdy $x \to 0$, to $x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$ stanowi ciąg małych coraz wyższego rzędu. Otóż $u = e^{\frac{1}{x^2}}$, gdy $x \to 0$ także jest nieskończenie małą; ale jeżeli zechcemy znaleźć jej miejsce w tylko co napisanym ciągu i wyznaczyć jej rząd, to okaże się znów niemożliwość; stosunek $u = e^{\frac{1}{x^2}}$ do x^α, jakąkolwiek wartość nadamy wykładnikowi $\alpha > 0$, dąży do zera to jest $\frac{u}{x^\alpha} \to 0$; w rzeczy samej, kładąc $\frac{1}{x^2} = z$, $\frac{u}{x^\alpha} = \frac{z}{e^z}$ i gdy $x \to 0$, to $z \to +\infty$; $\lim \frac{u}{x^\alpha} = \lim z^{\alpha/2} e^{-z} = 0$ (patrz l. 106 przykład 3). Jeżeli, co jest naturalne, gdy $\lim \frac{u}{v} = 0$ rząd małej u (o ile istnieje) uważać będziemy za większy od rzędu małej v, to rząd (o ile istnieje) małej $e^{-\frac{1}{x^2}}$ będzie większy od rzędu n małej x^n. Widzimy więc, że ten rząd nie mieści się w ramach poprzednio określonych rzędów małych $x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots \to 0$, kształtu x^α (gdzie α liczba rzeczywista > 0). O ile więc nie rozszerzymy w odpowiedni sposób określenia rzędu nieskończenie małej, to nieskończenie mała $e^{-\frac{1}{a^2}}$ nie posiada żadnego rzędu. Wskazanem jest rozszerzyć określenia poprzednie i wprowadzić specjalny symbol, np., ω, któryby oznaczał rząd nieskończe

nie małej $e^{-\frac{1}{x^1}}$ w stosunku do nieskończenie małej x, zmierzającej do zera. Rzędy nieskończenie małych kształtu x^{α}, $(\alpha > 0)$, które wyrażamy liczbą α, będziemy nazywali rzędami skończonemi. Zbiór rzędów α jest zbiorem uporządkowanym i uporządkowanym w ten sam sposób, jak odpowiadające liczby, czyli rząd n jest większy, równy lub mniejszy od rzędu m, zależnie od tego, czy liczba $n > m$, czy $n = m$, czy też $n < m$. Jeżeli dołączymy do rzędów skończonych rząd ω, to uporządkujemy nasz zbiór w ten sposób, że rząd ω będzie następował po wszystkich rzędach skończonych, t. j. $\omega > \alpha$, jakkolwiek wielką jest liczba α, oznaczająca rząd skończony. Możemy, wychodząc z tej sasady, utworzyć małą, której rząd jest mniejszy od rzędu małej x_{α}, $(\alpha > 0)$, jakkolwiek małą wartość liczbową nadalibyśmy wykładnikowi $\alpha > 0$, rozumiejąc przez to taką nieskończenie małą u, że $\frac{x^{\alpha}}{u} \to 0$ przy każdej wartości $\alpha > 0$. Wystarczy wziąć $u = \frac{1}{\lg x^2}$; gdy $x \to 0$, to $x^{\alpha} \to 0$ i $u \to 0$, lecz $\frac{x^{\alpha}}{u} = x^{\alpha} \lg x^2$ i, jak wiemy, (patrz l. 106 przykład 3), wyrażenie to dąży do 0, gdy $x \to 0$.

Weźmiemy pod uwagę trzy funkcje x^{α}, $\frac{x^{\alpha}}{\lg x^2}$ i $x^{\alpha + \frac{1}{n}}$, gdzie liczba $\alpha > 0$, a n jest liczbą całkowitą dodatnią dowolnie wielką. Przejdźmy teraz do rzędów tych trzech nieskończenie małych $(x \to 0)$; rzędem pierwszej jest α, rzędem trzeciej jest $\alpha + \frac{1}{n}$, pozostaje pytanie, jaki jest rząd drugiej małej, jest on większy od rzędu pierwszej bo stosunek $\frac{x_{\alpha}}{\lg x^2}$ do x^{α} dąży do zera, ale mniejszy od rzędu trzeciej, bo stosunek $x^{\alpha + \frac{1}{n}}$ do $\frac{x^{\alpha}}{\lg x^2}$ dąży również do zera; czyli rząd

$\frac{x^\alpha}{\lg x^2}$ jest większy od α, a mniejszy od $a+\frac{1}{n}$, gdzie $\frac{1}{n}$ jest liczbą dodatnią dowolnie małą.

2) Teraz możemy postawić pytanie drugie, mianowicie, czy, rozszerzywszy we wskazany poprzednio sposób pojęcie rzędu nieskończenie małej, (co pozwoliło nam wprowadzić rzędy takich funkcyj, jak $\frac{1}{\lg x^2}$ i $e^{-\frac{1}{x^2}}$), rząd da się teraz wyrazić liczbą. Odpowiedź jest, oczywiście, przecząca. Wystarczy przypomnieć sobie tylko co przytoczony przykład nieskończenie małych x^α, $\frac{x^\alpha}{\lg x^2}$, $x^{\alpha+\frac{1}{n}}$; gdyby można było rząd małej $\frac{x^\alpha}{\lg x^2}$ wyrazić jakąś liczbą, dajmy na to β, to musielibyśmy mieć nierówności

$$\alpha<\beta<\alpha+\frac{1}{n},$$

przy n dowolnie wielkiem, co jest niemożliwe.

O wielkich różnego rzędu.

Zupełnie podobną teorję zbudować można w tym przypadku, gdy mamy zamiast funkcyj zmierzających do zera, funkcje dążące do nieskończoności.

Określenie. 1) Jeżeli dwie zmienne u i v są tak związane ze sobą zależnością, że $u \rightarrow +\infty$, skoro tylko $v \rightarrow +\infty$, to te zmienne nazywamy (nieskończenie) wielkiemi; u i v są tego samego rzędu wtedy, gdy $\lim\frac{u}{v}$ istnieje i równa się pewnej liczbie $A \neq 0$.

Jeżeli $u \rightarrow +\infty$, gdy $x \rightarrow \infty$, to u będzie wielką rzędu α, o ile $\frac{u}{x^\alpha} \rightarrow A \neq 0$, gdy $x \rightarrow +\infty$; u i x^α są wtedy tego samego rzędu. O ile $u \rightarrow +\infty$, gdy $x \rightarrow a$, to za

wielką zasadniczą pierwszego rzędu bierzemy $\frac{1}{x-a}$. Wtedy $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ jest wielką rzędu α.

W ten sposób określiliśmy rzędy skończone. Gdy rząd jest większy, mówimy, że odpowiednia zmienna rośnie do nieskończoności prędzej; tak, np., w ciągu: $x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$, każda następna funkcja rośnie prędzej do nieskończoności od poprzedniej. Możemy i tutaj pokusić się o rozszerzenie pojęcia rzędu nieskończenie wielkiej, tak jak przy nieskończenie małych. Jeżeli $\frac{u}{v}$ dąży do ∞, więc powiemy, iż zmienna u rośnie do nieskończoności prędzej od zmiennej v i, jeżeli przyjdzie do wyznaczenia wielkim u i v rzędów, to powiemy, że rząd wielkiej u jest większy od rzędu wielkiej v. Ponieważ $\frac{e^x}{x^\alpha} \to +\infty$, gdy $x \to +\infty$, to widzimy, że funkcja e^x rośnie szybciej od jakiejkolwiek potęgi (dodatniej) zmiennej x. Jej rząd, oznaczony dajmy na to symbolem ω, jest większy od rzędu α, którejkolwiek z funkcyj x^α, $(\alpha > 0)$. Można tak samo utworzyć funkcję, która rośnie wolniej od każdej funkcji ciągu coraz wolniej rosnących funkcyj

$$x, x^{1/2}, x^{1/3}, \ldots, x^{\frac{1}{n}}$$

Taką funkcją jest np., $\lg x$, bo jak wiemy $\frac{x^\alpha}{\lg x} \to \infty$, gdy $x \to +\infty$.

Skala wzrastania.

Na zasadzie poprzedniego, możemy utworzyć następującą skalę funkcyj coraz to prędzej rosnących do nieskończoności; jest to nieskończony zbiór ciągów

$$x,\ x^2,\ x^3, \ldots, x^n, \ldots$$
$$e^x,\ e^{x^2},\ e^{x^3}, \ldots, e^{x^n}, \ldots$$
$$e^{e^x},\ e^{e^{x^2}},\ e^{e^{x^3}}, \ldots, e^{e^{x^n}}, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Na początku n^{go} wiersza tej tablicy mamy funkcję, którą dla krótkości oznaczymy przez $e_n(x)$, przyczem $e_1(x) = e^n$, $e_2(x) = e^{e_1(x)}$, $e_3(x) = e^{e_2(x)}, \ldots, e_n(x) = e^{e_{n-1}(x)}, \ldots$ Istnieją funkcje, które rosną jeszcze szybciej od $e_n(x)$, jakkolwiek wielką jest liczba n. Lecz funkcjami temi zajmować się nie będziemy.

Możemy ciągi poprzednie przedłużyć jakby w przeciwną stronę, t. j. możemy utworzyć skalę dla funkcyj rosnących nieograniczenie, ale coraz to wolniej

$$x,\ x^{1/2},\ x^{1/3}, \ldots, x^{\frac{1}{n}}, \ldots$$
$$\lg x,\ (\lg x)^{1/2},\ (\lg x)^{1/3}, \ldots, (\lg x)^{\frac{1}{n}}$$
$$\lg\lg x,\ (\lg\lg x)^{1/2},\ (\lg\lg x)^{1/3}, \ldots, (\lg\lg x)^{\frac{1}{n}}, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Na początku n^{go} wiersza tej tablicy mamy funkcję, którą dla krótkości oznaczymy przez $\lg_{(n)} x$, przyczem $\lg_{(1)} x = \lg x$, $\lg_{(2)} x = \lg\lg_{(1)} x = \lg(\lg x)$; $\lg_{(3)} x = \lg(\lg_{(2)} x), \ldots$ $\ldots, \lg_{(n)}(x) = \lg\lg_{(n-1)} x, \ldots$

I tu istnieją funkcje, które rosną do nieskończoności wolniej, t. j. mniej szybko od wszelkiej funkcji $\lg_{(n)} x$ (dla dowolnego n).

Stąd widzimy zupełną analogję między wszystkiem, cośmy powiedzieli poprzednio o nieskończenie małych i tem, co się tyczy nieskończenie wielkich. Analogja ta jest zupełnie zrozumiała, na podstawie istniejącej między nieskończenie małemi i nieskończenie wielkiemi odpowiedniości, bo, jeżeli $u(x)$ jest nieskończenie wielką, to jest

dąży do $+\infty$; to $\frac{1}{u(x)}$ jest nieskończenie małą, t. j. dąży do zera.

Wnioski, które będziemy teraz formułować, odnosić się będą w jednakowem stopniu do nieskończenie wielkich i do nieskończenie małych.

Przypuśćmy, że mamy do czynienia, na razie z rzędami skończonemi, t. j. ze zmiennemi, zmierzającemi do zera, lub do nieskończoności tak jak x^α, gdy $x \rightarrow 0$ lub do $+\infty$, gdzie $\alpha > 0$ liczba rzeczywista. Niech $u(x)$ i $v(x)$ będą dwiema takiemi funkcjami; utwórzmy funkcję $f(x) = u(x) . v(x)$; jeżeli rzędy funkcyj u i v są odpowiednio α_1 i α_2, to rząd iloczynu $f(x)$ jest równy $\alpha_1 + \alpha_2$, gdyż

$$\lim \frac{f(x)}{x^{\alpha_1+\alpha_2}} = \lim \frac{u(x)}{x^{\alpha_1}} . \lim \frac{v(x)}{x^{\alpha_2}} = A_1 . A_2 \neq 0,$$

gdzie $$\lim \frac{u(x)}{x^{\alpha_1}} = A_1 \neq 0 \text{ i } \lim \frac{v(x)}{x^{\alpha_2}} = A_2 \neq 0.$$

Tak więc rząd iloczynu równa się sumie rzędów czynników. To prawo, które udowodnić można tylko dla rzędów skończonych, bierzemy jako podstawę do oznaczania rzędów funkcyj, utworzonych przez mnożenie skończonej liczby funkcyj, na rzędy, dla których mamy już symbole. Tak, np., jeżeli rząd nieskończenie wielkiej e^x oznaczymy przez ω, to rząd nieskończenie wielkiej $x^2 . e^x$ będziemy oznaczali przez $\omega + 2$ lub $2 + \omega$, (prawo przemienności), rząd nieskończenie wielkiej $e^{2x} = e^x . e^x$ przez $\omega + \omega$ czyli 2ω i t. d. Jeżeli teraz z funkcyj $u(x)$ i $v(x)$ utworzymy funkcję złożoną $\varphi(x) = u\{v(x)\}$, to rząd funkcji $\varphi(x)$ będzie $\alpha_1 . \alpha_2$. To prawo, które udowodnić można tylko dla rzędów skończonych bierzemy za podstawę do oznaczania rzędów funkcyj, utworzonych jako funkcje złożone z funkcyj prostych, których rzędy oznaczyliśmy już uprzednio odpowiednimi symbolami. Tak, np., gdy $x \rightarrow +\infty$, nieskończenie wielką

e^{e^x} oznaczymy symbolem $\omega.\omega=\omega^2$. Zauważymy, że mnożenie rzędów nie jest przemienne; np., $2.\omega$ oznacza rząd funkcji $(e^x)^2=e^{2x}$, gdy tymczasem $\omega.2$ oznacza rząd funkcji e^{x^2}; ponieważ $\frac{e^{x^2}}{e^{2x}}=e^{x^2-2x}\to\infty$, gdy $x\to+\infty$, więc rząd $\omega.2$ należy uważać za większy od rzędu $2.\omega$.

Zauważmy wreszcie, że rząd sumy pewnej (skończonej) liczby wyrazów równa się rzędowi tego składnika, który jest największy albo najmniejszy, zależnie od tego czy mamy do czynienia z nieskończenie wielkiemi czy też z nieskończenie małemi; wyraz ten nazywa się wyrazem głównym. Stosuje się to także i w tym przypadku, gdy rzędy składników nie są rzędami skończonemi.

Jeżeli, naprzykład, chodzi o nieskończenie wielkie, to wyrazem głównym w e^x+x^2 jest e^x, który to wyraz rośnie najszybciej, gdy $x\to+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+x^2}{e^x}=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=1$.

W $\lg x+\sqrt[3]{x}$ wyrazem głównym jest $\sqrt[3]{x}$; w $e^{x^2\lg x}+e^{x^2}+$ $+x(\lg x)^3+\lg x$ wyrazem głównym jest $e^{x^2\lg x}$.

Jeżeli chodzi o nieskończenie małe, to np., w x^3+x^5 wyrazem głównym będzie x^3; w $\frac{1}{\lg x}+x$ wyrazem głównym będzie $\frac{1}{\lg x}$.

Jeżeli chcemy określić granicę stosunku dwóch wyrażeń u i v, które dążą do zera lub do nieskończoności, to bierzemy pod uwagę tylko stosunek ich wyrazów głównych, na tej zasadzie, iż

$$\lim\frac{u}{v}=\lim\frac{\text{wyraz główny w } u}{\text{wyraz główny w } v}.$$

Ćwiczenie: uporządkować według skali wzrastania następujące funkcje (nieskończenie wielkie w otoczeniu „punktu w nieskończoności“).

$$e^{x^2},\ x^x,\ e^{x\lg x},\ e^{x(\lg\lg x)^2},\ \lg x\,.\,e^{x\lg x},$$
$$e^{x^2\lg x},\ x e^{x^2},\ (\lg x)^x,\ x^{\lg x},\ e^{(\lg x)^2},\ x^{x\lg x},$$
$$(x\lg x)^{\lg x},\ x^{2\lg x},\ (x\lg x)^x,\ x^{\lg\cdot\lg\lg x},\ (\lg x)^{\lg x}.$$

Poprzednie rozważania mają głównie na celu wykazanie jak wielka różnica zachodzi między przypadkiem, gdy mamy do czynienia z rzędami skończonemi, a przypadkiem, gdy tak nie jest. Gdy rzędy są skończone, to możemy wyrazić je liczbami, i temi liczbami operować zgodnie z ogólnemi prawami działań nad liczbami, gdy rzędy nie skończone, nie można się obejść bez nowych symboli, gdzie już działania podlegają innym, złożonym prawom; rzecz cała staje się bardzo zawiła. Dlatego cenną jest rzeczą znać pewną klasę funkcyj, które, gdy dążą do zera, posiadają zawsze rząd skończony, t. j. są nieskończenie małemi skończonego rzędu, a nawet całkowitego, t. j. tak się zachowują, jak nieskończenie małe x, x^2, x^3,... Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ i jej pochodne, aż do n^{go} rzędu włącznie są określone w otoczeniu punktu a, następnie załóżmy, że te pochodne są równe zeru w punkcie a, t. j. że $f'(x)=0$, $f''(a)=0,\dots, f^{(n-1)}(a)=0$, z wyjątkiem ostatniej, która nie równa się zeru, $f^{(n)}(a)\neq 0$. Są to warunki, które muszą być spełnione na to, by można było w pewnym zakresie zastosować twierdzenie Taylora (patrz l. 104); wzór 83, w którym podstawimy a zamiast x i x zamiast h, przyjmie postać:

$$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{1!}f'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-)}(a)+R_n,$$

gdzie

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta x),\quad (0<\theta<1);$$

wzór ten jest spełniony, o ile $a+x$ należy do wzmiankowanego otoczenia punktu a, t. j. $|x|<h$, gdzie h liczba stała >0, dostatecznie mała. Ponieważ pochodne w punkcie a równe są zeru, więc wzór poprzedni przybiera postać

$$f(a+x)-f(a)=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta x),$$

czyli

$$\frac{x^n}{f(a+x)-f(a)}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a+\theta x);$$

przechodząc do granicy, gdy $x \to 0$, mamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x^n}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to 0}f^{(n)}(a+\theta x)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\neq 0,$$

zakładając ciągłość pochodnej $f^{(n)}(x)$ w punkcie a.

Widzimy więc, że $f(a+x)-f(a)$ jest małą rzędu n, gdy zmienna $x \to 0$. Podstawiając x zamiast $a+x$, otrzymamy

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a).$$

Wynik ten można było otrzymać, nie zakładając ciągłości pochodnej $f^{(n)}(x)$ w punkcie a, ani nawet istnienia tej pochodnej w otoczeniu punktu a; wystarcza tylko istnienie tej pochodnej w punkcie a i założenie, że $f^{(n)}(a)\neq 0$; pozostałe założenia, oczywiście, zostawiamy bez zmiany. Do $\frac{f(a+x)-f(a)}{x^n}$ zastosujemy twierdzenie L'Hospital'a, zatrzymując się na pochodnej $(n-1)$ rzędu; otrzymamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x^n}=\frac{1}{n}\lim\frac{f'(a+x)}{x^{n-1}}=$$

$$=n(n-1)\lim\frac{f''(a+x)}{x^{n-2}}=\ldots=\frac{1}{n!}\lim\frac{f^{(n-1)}(a+x)}{x}$$

lecz z określenia pochodnej $f^{(n)}(a)$ wynika, że

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+x)-f^{(n-1)}(a)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+x)}{x},$$

ponieważ $f^{(n-1)}(a)=0$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x^n}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+x)}{x}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\neq 0.$$

W ten sposób możemy się przekonać, że $\sin x$ jest małą pierwszego rzędu, gdy $x \to 0$, $1 - \cos x$ jest rzędu drugiego, gdyż $f''(0) \neq 0$, a $f'(x) = \sin x$ równa się zeru w punkcie $x = 0$; $\operatorname{tg} x - x$ jest rzędu trzeciego, jak również $x - \sin x$ i $\sin x - \cos x$, gdyż pochodne tych funkcyj są równe zeru dla $x = 0$, aż do rzędu drugiego włącznie, a pochodne trzeciego rzędu nie są równe zeru; tak samo sprawdzić możemy, że $(9 + 6 \cos x) x - (14 + \cos x) \sin x$ jest małą siódmego rzędu, a $6 \operatorname{tg} x - 6 \arcsin x - \sin^3 x$ jest małą rzędu piątego.

Jeżeli teraz weźmiemy pod uwagę funkcję, która dąży do zera, gdy $x \to 0$ i która nie jest rzędu skończonego, jak, np., $\frac{1}{\lg x^2}$ albo $e^{-\frac{1}{x^2}}$, to należy oczekiwać, że te funkcje nie posiadają pochodnych w punkcie $x = 0$, albo też, jeśli posiadają jakie pochodne (n. p., do n^{go} rzędu), to te pochodne są wszystkie równe zeru, tak że niema możności zastosować twierdzenie Taylora albo l'Hospital'a i otrzymać stąd rząd tej funkcji, jako nieskończenie małej. I tak jest w istocie; np., pochodną funkcji $y = \frac{1}{\lg x^2}$ dla $x \neq 0$; $y = 0$ dla $x = 0$, otrzymujemy jako granicę $\lim \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\lg h^2}$; otóż to wyrażenie granicy skończonej nie posiada. Gdybyśmy się zwrócili teraz do funkcji $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ dla $x \neq 0$ i $f(0)$, to przekonaliśmy się, że jej pochodne wszystkich rzędów są równe 0; $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} 1\, e^{-\frac{1}{h^2}} = 0$; $f'(x) = x^3 e^{-\frac{1}{x^2}}$; $f''(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{2}{h^3} e^{-\frac{1}{h^2}} = 0$; i t. d. Drogą indukcji matematycznej możemy udowodnić, że pochodna każdego rzędu jest granicą dla $h \to 0$ iloczynu pewnego wielomianu

względem $\frac{1}{h}$ przez $e^{-\frac{1}{h^2}}$; otóż podstawiając $z=\frac{1}{h}$, mamy

$\lim\limits_{z^2\to\infty} P(z)\, e^{-z^2}=0$, (patrz 1. 106 przykład 3). Tak więc $e^{-\frac{1}{x^2}}$ posiada w punkcie $x=0$ pochodne wszystkich rzędów, ale te pochodne wszystkie są równe zeru.

108. *Badanie przebiegu zmienności funkcji $y=f(x)$ i wykres odpowiedniej krzywej.*

Badanie to rozpada się na szereg następujących czynności pomocniczych:

1) Zbadać, w jakich przedziałach funkcja jest określona; otrzymamy przedziały (m_1, n_1), (m_2, n_2), i t. d. między przedziałami mogą być przedziały $(-\infty, l)$, lub $(k, +\infty)$.

2) Zbadać punkty nieciągłości funkcji i jej pochodnej; otrzymamy punkty α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$

3) Zbadać, w jakich przedziałach pochodna jest dodatnia, a w jakich ujemna, znaleźć wreszcie punkty, w których pochodna równa się zeru; otrzymamy punkty a_1, a_2, $a_3, \ldots$

4) Zbadać, jak się zachowuje funkcja w otoczeniu odosobnionych punktów nieciągłości α_1, $\alpha_2, \ldots$ Zbadać, czy funkcja dąży do granicy, czy rośnie do nieskończoności z lewej i z prawej strony tych punktów; czemu równa się, (jeśli istnieje) granica lewostronna, granica prawostronna.

5) Zbadać, jak zachowuje się funkcja, gdy $x\to+\infty$ i gdy $x\to-\infty$, jeżeli otoczenia punktów $+\infty$ i $-\infty$ należą do przedziałów, w których funkcja jest wyznaczona; czy istnieje granica, gdy $x\to+\infty$ i gdy $x\to-\infty$, czy funkcja rośnie do $+\infty$, czy maleje do $-\infty$, czy też granicy wcale niema.

6) Możemy jeszcze wyznaczyć punkty, w których funkcja staje się równą zeru, i znaleźć przedziały, w których funkcja jest dodatnia i ujemna.

Niech (Z) oznacza zbiór punktów $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots m_k, n_k, \ldots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p, \ldots; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_l, \ldots$, wyznaczonych poprzednio (1, 2 i 3). Będziemy rozpatrywali przypadek, gdy zbiór pochodny (Z') składa się ze skończonej liczby punktów, t. j. gdy punktów skupienia jest liczba skończona. Zamknijmy każdy punkt skupienia g wewnątrz przedziału $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$, gdzie ε jest dowolnie małe i usuńmy na razie z płaszczyzny pasma, zawarte między dwoma równoległemi do osi Oy, przechodzące przez punkty $g-\varepsilon$ i $g+\varepsilon$, t. j. usuńmy punkty, których odcięte zawarte są między $g-\varepsilon$ i $g+\varepsilon$. Po za usuniętemi pasmami liczba punktów zbioru (Z) na osi x jest skończona. Przez każdy taki punkt zbioru (Z) poprowadźmy równoległą do osi Oy; podzielimy w ten sposób płaszczyznę XOY na skończoną liczbę pasm, przyczem pasmem nazywamy część płaszczyzny, zawartą między dwiema kolejnemi równoległemi; kasujemy pasma, w których funkcja nie jest określona. Otrzymujemy n pasm, w których będziemy mogli z łatwością po kolei przebieg zmienności funkcji zbadać i uzmysłowić za pomocą wykresu. W rzeczy samej, wewnątrz każdego pasma funkcja jest ciągła, (bo punkty nieciągłości są punktami podziału, tak że punkty nieciągłe mogą być tylko na granicy między dwoma przyległemi pasmami); poza tem wewnątrz pasma funkcja jest stale rosnąca albo stale malejąca, (bo pochodna zachowuje znak stały); gdy zbliżamy się do granicy, oddzielającej jedno pasmo od przyległego, funkcja rośnie do $+\infty$ lub maleje do $-\infty$, lub też dąży do określenia granicy, (która jest granicą jednostronną, bo nie wychodzimy z pasma). Tak samo postępujemy z pozostałemi pasmami. Łącząc razem częściowe wykresy z każdego pasma, otrzymujemy obraz geometryczny przebiegu zmienności funkcji z wyjątkiem przedziałów $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$. Ponieważ $\varepsilon > 0$ jest dowolnie małe, możemy w ten sposób zbliżyć się do punktu g

z obu stron dowolnie blizko; w ten sposób, (t. j. dając zmiennej ε ciąg wartości malejących i zmierzających do zera), będziemy mogli poznać zachowanie się funkcji w otoczeniu takich punktów, jak punkt g, czyli będziemy mogli zbadać, czy funkcja zmierza do jakiejś granicy, gdy x dąży do punktu g bądź z lewej, bądź z prawej strony, a jeżeli zmierza, to do jakiej. Tutaj funkcja może być ograniczoną w otoczeniu punktu g, ale nie zmierzać do żadnej granicy; w takim razie punkt g jest punktem nieciągłości drugiego rodzaju.

Ten sposób postępowania można rozciągnąć na przypadek, gdy punktów skupienia zbioru (Z) jest liczba nieskończona, ale wszystkie są punktami odosobnionemi, t. j. gdy zbiór pochodny (Z') jest nieskończony, ale zbiór (Z'') pochodny pochodnego jest pusty. Wtedy w przedziale skończonym $(-l, +l)$, jakkolwiek wielką jest liczba $l>0$, mamy skończoną liczbę punktów g zbioru (Z), czyli spełnione są w przedziale $(-l, +l)$ te same warunki, które umożliwiły nam poprzednio przeprowadzenie dyskusji; jeżeli teraz zauważymy, że liczba $l>0$ jest dowolna, to nadając liczbie l ciąg wartości, zmierzających do nieskończoności, będziemy mogli zbadać zachowanie się funkcji w otoczeniu punktów w nieskończoności.

Jeżeli zbiór (Z') punktów g posiada punkty skupienia, t. j. jeżeli zbiór (Z'') pochodny pochodnego nie jest pusty, lecz zawiera skończoną liczbę punktów, dajmy na to takich jak σ, to wykluczamy przedziały $(\sigma-\varepsilon, \sigma+\varepsilon)$; łatwo widzieć, że w pozostałej części stosują się metody, podane poprzednio. Stąd wniosek, że zakres stosowalności sposobu badania przebiegu zmienności funkcji, który tu podaliśmy, jest uwarunkowany tem, by z pośród zbiorów (Z), (Z'), (Z''),..., z których każdy następny jest pochodnym zbioru poprzedniego, był zbiór $(Z^{(n)})$, pusty, t. j. nie zawierający żadnego punktu; wtedy, każdy następny jest także pusty.

W przypadku, gdy funkcję można rzeczywiście wykreślić, gdy wykres uzmysławia naprawdę przebieg zmienności funkcji, poprzednie zasady zupełnie wystarczają. Oczywiście są funkcje, dla których metoda tu wyłożona nie da się zupełnie zastosować, jak np., gdy punkty nieciągłości stanowią zbiór wszędzie gęsty; lecz są to właśnie funkcje, których obraz geometryczny nie daje się zrealizować praktycznie w postaci wykresu, mającego jakiekolwiek znaczenie dla uzmysłowienia przebiegu zmienności funkcji. Stąd wynika, że posiadamy metodę, która w praktyce jest zupełnie wystarczająca. Mając ogólny pogląd na przebieg zmienności funkcji, ustalony na zasadzie wyłożonej dyskusji, możemy wyrobić sobie sąd o tem, jakie poszczególne punkty mają specjalne znaczenie dla dokładności wykresu i te punkty, odpowiadające, np., maximum albo minimum, wyznaczymy wprost z równania. Należy jednak pamiętać, że wyznaczenie nawet bardzo wielu punktów wprost z równania i połączenie ich krzywą, bez uprzedniego zbadania ogólnego przebiegu zmienności, nie zabezpiecza nas nie raz od znacznych nawet błędów. Dla uzupełnienia badania możemy przyjąć pod uwagę i inne jeszcze okoliczności, np., znak pochodnej drugiej i wogóle można byłoby uwzględnić pochodne rzędów wyższych, o których nie było dotychczas w naszem badaniu mowy. O roli pochodnej drugiej przy badaniu funkcji będzie zresztą mowa później (część III), w rozdziałach, poświęconych zastosowaniom analizy do geometrji; to samo się tyczy wogóle wszelkich badań, mających charakter przeważnie geometryczny, chociaż i pożytecznych dla wyrobienia ogólnego poglądu na przebieg zmienności funkcji, jako to wyznaczenie asymptot, punktów przegięcia i t. p. (patrz część III). Należy zauważyć jeszcze, że wszystko, o czem była w tym rozdziale mowa, tyczy się tylko funkcji $y=f(x)$, t. j. krzywych, wyznaczonych przez równanie

tego typu, w którym jednej wartości zmiennej x odpowiada jedna tylko wartość zmiennej y; krzywa tego rodzaju ma jeden tylko punkt wspólny z każdą równoległą do osi Oy. Jest to zatem wypadek dość szczególny krzywych. O wykreślaniu krzywych wyznaczonych przez równania: $f(x,y)=0$, równanie funkcji uwikłanej; $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, równanie parametryczne, będzie mowa później.

Przykłady.

1) $$y=\frac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4};$$

funkcja jest określona dla wszystkich wartości zmiennej x z wyjątkiem $x=-4$ i $x=-1$, przy których mianownik równa się zeru; są to jedyne dwa punkty nieciągłości; pochodną jest $y'=\frac{10(x^2-4)}{(x^2+5x+4)^2}$; pochodna staje się równą zeru i zmienia znak dla $x=\pm 2$; w przedziale $(-\infty, -2)$, $y'>0$; w $(-2, +2)$, $y'<0$: w $(+2, +\infty)$, $y'>0$. Gdy $x\to+\infty$ albo gdy $x\to-\infty$, to $y\to 1$. Zbiór (Z) zawiera punkty: $-4, -2, -1, +2$; mamy więc przedziały $(-\infty, -4)$; $(-4, -2)$; $(-2, -1)$; $(-1, +2)$; $(+2, +\infty)$ i odpowiadające im pasma. W pierwszem paśmie funkcja rośnie od 1 do $+\infty$; w drugiem rośnie od $-\infty$ do -9; w trzeciem maleje od -9 do $-\infty$; w czwartem maleje od $+\infty$ do $-\frac{1}{9}$; w piątem rośnie od $-\frac{1}{9}$ do jedności. Punkty przecięcia się z osią mamy dla $x=1$ i $x=4$.

2) $$y=\frac{3x^2-4}{x^3-3x^2+4};$$

funkcja jest określona dla wszystkich wartości zmiennej, z wyjątkiem $x=-1$ i $x=2$, które są punktami zerowemi mianownika; są to jedyne dwa punkty nieciągłości. Pochodną jest $y'=-\frac{3x^2(x+2)}{(x^3-3x^2+4)^2}$; pochodna staje się równą zeru w punktach $x=0$ i $x-2$, przyczem zmienia

znak tylko w punkcie $x=-2$; w $(-\infty, -2)$, $y'\leqslant 0$; w $(-2, +2)$ pochodna jest $\geqslant 0$; w $(+2, +\infty)$ pochodna y' jest <0. Mamy więc przedziały $(-\infty, -2)$; $(-2, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, +2)$; $(+2, +\infty)$ i 5 odpowiadających im pasm; w pierwszem funkcja maleje od 0 do $-\frac{1}{2}$; w drugiem funkcja rośnie od $-\frac{1}{2}$ do $+\infty$; w trzeciem rośnie od $-\infty$ do -1; styczna w tym punkcie do krzywej jest $\parallel$ do osi Oy; w czwartem paśmie funkcja rośnie od -1 do $+\infty$; w piątem paśmie funkcja maleje od $+\infty$ do zera.

3) $$y=e^{\operatorname{tg} x};$$

punktami nieciągłości są tu punkty $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, (gdzie $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); we wszystkich innych punktach funkcja jest określona. Gdy $x\to\frac{\pi}{2}+k\pi$ z prawej strony, to funkcja zmierza do zera; gdy $x\to\frac{\pi}{2}+k\pi$ z lewej strony, to funkcja rośnie do $+\infty$.

Pochodna $y'=y\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$; y' nie równa się nigdzie zeru, bo $y'>0$ dla każdej wartości x, nie należącej do punktów nieciągłości (w punktach nieciągłości pochodna y nie jest określona). Dalsze badanie jest ułatwione przez okresowość naszej funkcji, która spełnia warunek $f(x+\pi)=f(x)$; stąd wynika odrazu, że funkcja nie dąży do żadnej granicy, gdy $x\to+\infty$ albo do $-\infty$. Zbiór (Z) utworzony jest z punktów $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; mamy nieskończenie wiele pasm, w każdem paśmie, z powodu okresowości, przebieg zmienności jest zupełnie jednakowy; gdy x rośnie od $-\frac{\pi}{2}$ do 0, y rośnie od 0 do 1; gdy x rośnie od 0 do π, y rośnie od 1 do $+\infty$.

4) $$y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}\right);$$

punktami nieciągłości są tu punkty $x = +3$, $x = -3$, następnie punkty $x_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{5}{4}}, \ldots, x_p = \sqrt{\frac{5}{2^p}}, \ldots,$ $x_{-1} = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $x_{-2} = \sqrt{\frac{5}{4}}, \ldots, x_{-p} = \sqrt{\frac{5}{2^p}}, \ldots$; wreszcie punkty symetryczne względem punktu $x = 0$, t. j. punkty, $-x_1$, $-x_2$, $-x_3, \ldots, -x_p, \ldots$ $-x_{-1}$, $-x_{-2}, \ldots$, $-x_{-p}, \ldots$ Gdy zbliżamy się do któregokolwiek punktu nieciągłości x_p $(p = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ z lewej strony, to funkcja nasza dąży do $-\infty$, z prawej zaś strony do $+\infty$; w otoczeniu punktów nieciągłości $-x_p$ rzecz się ma wprost przeciwnie, t. j. funkcja dąży do $+\infty$ z lewej strony, do $-\infty$ z prawej. Pochodna

$$y' = \frac{-10x}{(x^2 - 9)^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(x^2 - 4)}{(x^2 - 9)}};$$

jest ona dodatnia, gdy $x < 0$, jest ujemna, gdy $x > 0$, równa się zeru dla $x = 0$.

Zbiór (Z) składa się z punktów nieciągłości poprzednio wyszczególnionych i z punktu $x = 0$; zbiór (Z') nie jest tu pusty, utworzony jest z dwóch punktów $+3$ i -3, które są jedynemi punktami skupienia zbioru (Z). Mamy więc nieskończenie wiele pasm; lecz po wykluczeniu otoczenia punktów $+3$ i -3 i odpowiadających im pasm, w pozostałej części płaszczyzny jest pasm liczba skończona. Funkcja nasza jest symetryczna względem osi Oy, z czego wynika symetrja rozkładu pasm i punktów nieciągłości. Mamy dwa pasma środkowe, odpowiadające przedziałom $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{26}, 0\right)$ i $\left(0, +\frac{1}{2}\sqrt{26}\right)$; w pierwszem z tych pasm funkcja rośnie od $-\infty$ do $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9} < 1$; w drugiem paśmie

funkcja maleje od $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{6}$ do $-\infty$. Następne pasma odpowiadają przedziałom $(\frac{1}{2}\sqrt{26},\ \frac{1}{2}\sqrt{31})$, $(\frac{1}{2}\sqrt{31},\ \sqrt{\frac{59}{6}})$,..... ....$\left(\sqrt{9-\frac{5}{2^p}},\ \sqrt{9-\frac{5}{2^p+2}}\right)$; w każdem z tych pasm funkcja maleje od $+\infty$ do $-\infty$. Następnie mamy otoczenie puntu 3 w postaci, np., przedziału $\left(\sqrt{9-\frac{5}{2^p+2}},\ \sqrt{9+\frac{5}{2^p+2}}\right)$, którym się narazie nie zajmujemy, a w którym zawiera się nieskończenie wiele puntów nieciągłości. Wreszcie będziemy mieli przedziały $\left(\sqrt{9+\frac{5}{2^p+2}},\ \sqrt{9+\frac{5}{2^p}}\right)$, $\left(\sqrt{9+\frac{5}{2^p}},\ \sqrt{9+\frac{5}{2^p-2}}\right)$,... $(\frac{1}{2}\sqrt{41},\ \frac{1}{2}\sqrt{46})$, $(\frac{1}{2}\sqrt{46},\ +\infty)$; w każdym z tych przedziałów funkcja maleje od $+\infty$ do $-\infty$.

Po stronie odciętych ujemnych mamy analogiczny rozkład pasm; w każdem z tych pasm funkcja rośnie od $-\infty$ do $+\infty$. Pozostaje do zbadania zachowanie się funkcji w otoczeniu punktów $+3$ i -3; z powodu symetrji, możemy ograniczyć się do punktu $+3$. Jest to punkt nieciągłości drugiego rodzaju; funkcja nie zmierza do żadnej granicy (skończonej czy nieskończonej), gdy x dąży lewostronnie czy prawostronnie do 3. W miarę tego, jak liczba p rośnie, liczba pasm z obu stron punktu 3 wzrasta nieograniczenie, a w każdym paśmie funkcja wykonuje wahanie od $+\infty$ do $-\infty$; tak więc, w otoczeniu punktu 3 zgęszcza się nieskończona liczba takich pasm, i funkcja wykonuje nieskończenie wiele wahań nieskończonych od $+\infty$ do $-\infty$.

5) $$y=\frac{2}{\pi}\operatorname{Arc\,tg}\left(k\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x\right);$$

funkcja jest wyznaczona dla wszystkich wartości zmiennej x, z wyjątkiem punktów nieciągłości: $x=\pm 1,\ \pm 3,\ldots$

Funkcja jest okresowa (okres 2) i symetryczna względem punktu 0; w tem znaczeniu, że gdy punkt o spółrzędnych x, y należy do krzywej, to i punkt $-x, -y$ należy też do wykresu; y jest zawsze zawarte między $-\frac{\pi}{2}$ i $+\frac{\pi}{2}$.

Pochodna

$$y' = \frac{k}{\cos^2\frac{\pi}{2}x + k^2\sin^2\frac{\pi}{2}x} \text{ jest zawsze } > 0, \ (k > 0).$$

Jedynemi punktami (Z) są punkty o spółrzędnych nieparzystych. Z powodu okresowości wystarczy zbadać funkcję w jednem paśmie, gdyż w pozostałych pasmach przebieg jest ten sam.

Gdy x zbliża się do punktu nieciągłości z prawej strony, to y zmierza do 1, gdy x zmierza do punktu nieciągłości z lewej strony, y zmierza do -1. Tak więc w paśmie $(-1 +1)$, np., funkcja rośnie od -1 do $+1$ przechodząc przez 0 w punkcie $x = 0$; w przypadku $k = 1$, mamy odcinek linji prostej, nachylonej pod kątem $\frac{\pi}{2}$ do osi Ox (odcinek dwusiecznej); wtedy y' ma wartość stałą równą 1; gdy $k \neq 1$, dla bliższego zbadania przebiegu zmienności, zbadajmy przebieg zmienności pochodnej y'; w punkcie -1 i $+1$ pochodna równa się $\frac{1}{k}$, w punkie 0 zaś równa się k: $y'' = \frac{\pi . (k(1-k^2)\sin \pi x}{2\left(\cos^2\frac{\pi}{2}x + k^2\sin^2\frac{\pi}{2}x\right)^2}$, a więc gdy $k > 1$, pochodna pierwsza rośnie w przedziale $(-1, 0)$ od $\frac{1}{k}$ do k, a w przedziale $(0, +1)$ maleje od k do $\frac{1}{k}$; gdy $k < 1$, to w $(-1, 0)$ y' maleje od $\frac{1}{k}$ do k, a w $(0, 1)$ rośnie od k do $\frac{1}{k}$; $(k > 0)$. Czytelnik wysnuje stąd wniosek, tyczący się kształtu

krzywej, pamiętając, iż pochodna pierwsza wyraża spółczynnik nachylenia stycznej; krzywa w jednej części przedziału jest wklęsła, w drugiej wypukła.

Pochodne funkcyj wielu zmiennych.

Pochodne cząstkowe.

Ograniczymy się narazie do funkcyj dwóch zmiennych $z=f(x,y)$. Przypuszczamy, iż funkcja ta jest określona wewnątrz obszaru (D) i niech x, y oznacza pewien punkt P wewnątrz (D). Jeżeli wartość jednej ze zmiennych ustalimy, wtedy funkcja nasza staje się funkcją jednej zmiennej x i możemy utworzyć jej pochodną jeżeli takowa istnieje; oznaczamy ją przez $f'_x(x,y)$ lub $\frac{\partial z}{\partial x}$ tak więc:

$$f'_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h};$$

przypuszczamy, że punkty $x+h, y$ należą do (D), co ma z pewnością miejsce, począwszy od dostatecznie małej wartości $|h|$. Zupełnie tak samo określimy $f'_y(x,y)$ czyli $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$f'_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x,y+h)-f(x,y)}{h}.$$

Widzimy więc, że pochodne cząstkowe nie są to pojęcia istotnie nowe.

Naprzykład:

$$z=\sqrt{x^2+y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$z=x^2+y^3;\quad \frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=3y^2.$$

$$z=\lg(x+\sqrt{x^2+y^2});\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}.$$

Możemy w dalszym ciągu tworzyć pochodne cząstkowe tych pochodnych cząstkowych; tak np., wychodząc z $f'_x(x,y)$

będziemy mogli utworzyć $f''_{xx}(x,y)$ czyli $f''_{x^2}(x,y)$ lub

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(x+h,y)-f'_x(x,y)}{h} \text{ albo}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(x,y+h)-f'_x(x,y)}{h},$$

o ile, naturalnie, te granice istnieją. Tak samo, wychodząc z $f'(x,y)$ utworzymy $f''_{yx}(x,y)$ i $f''_{yy}(x,y)$ czyli $f''_{y^2}(x,y)$, które oznaczamy też przez symbole $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y}$ czyli $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Tak, np., $f''_y(x,y) = \lim \frac{f'_y(x+h,y)-f'_y(x,y)}{h}$.
W ten sposób mogłoby się zdawać, że pochodnych cząstkowych drugiego rzędu mamy cztery f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{y^2}. W istocie, jest ich mniej, o ile będziemy brali pod uwagę tylko te, które są funkcjami różnemi; a to na mocy następującego twierdzenia:

Jeżeli pochodne cząstkowe $f''_{xy}(x,y)$ i $f''_{yx}(x,y)$ istnieją w obszarze (D), to w każdym punkcie tego obszaru (D), gdzie te funkcje (pochodne cząstkowe) są ciągłe, mamy

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y).$$

Aby tego dowieść, przekształcimy wyrażenie

$$F = f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y),$$

gdzie punkt $x+h, y+k$, jak również punkty x,y; $x+h,y$; $x,y+h$ należą do (D) i $h \neq 0$, $k \neq 0$. Wprowadzimy jeszcze następujące oznaczenia

$$\varphi(x,y) = f(x+h,y) - f(x,y),$$
$$\psi(x,y) = f(x,y+k) - f(x,y);$$

wtedy

$$F = \varphi(x,y+k) - \varphi(x,y) = \psi(x+h,y) - \psi(x,y).$$

W pierwszej z tych różnic x pozostaje bez zmiany, a w drugiej y; stąd wniosek, że do każdej z tych różnic możemy zastosować wzór na wartość średnią, udowodniony dla funkcji jednej zmiennej; tak więc

$$F = k\varphi'_y(x, y+\theta_1 k) = h\psi'_x(x+\theta_2 h, y),$$

gdzie $0<\theta_1<1;\ 0<\theta_2<1.$

Lecz $\varphi'_y(x, y+\theta_1 k) = f'_y(x, y+\theta_1 k)$

$$\psi'_x(x+\theta_2 h, y) = f'_x(x\theta_2 h, y+k) - f'_x(x+\theta_2 h, y),$$

czyli mamy znowu różnice wartości funkcyj, odpowiadające zmianie wartości jednej tylko zmiennej, czyli możemy znowu zastosować wzór na wartość średnią. Otrzymamy

$$F = kh f''_{yx}(x+\theta_3 h, y+\theta_1 k),$$
$$F = kh f''_{xy}(x+\theta_2 h, y+\theta_4 k),$$

gdzie znowu $0<\theta_3<1;\ 0<\theta_4<1$. Porównując te dwie wartości na F, otrzymamy:

$$f''_{yx}(a+\theta_3 h, y+\theta_1 k) = f''_{xy}(x+\theta_2 h, y+\theta_4 k).$$

Jeżeli teraz h i k dążą do zera, to lewa i prawa strona równości zmierzają do wspólnej granicy; z powodu ciągłości pochodnych $f''_{xy}(x, y)$ i $f''_{yx}(x, y)$,

$$\lim_{h\to 0, k\to 0} f''_{yx}(x+\theta_3 h, y+\theta_1 k = f''_{yx}(x, y),$$
$$\lim_{h\to 0, k\to 0} f''_{xy}(a+\theta_2 h, y+\theta_4 k) = f''_{xy}(x, y).$$

Tak więc $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Naprzykład, jeżeli

$$f(x, y) = \lg\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right), \text{ to } f'_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}};\ f'_y(x, y) = \frac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$f''_{yx}(x, y) = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \text{ czyli } f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

110. *Wzór na wartość średnią i pochodną funkcji złożonej.*

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ posiada pochodne cząstkowe ciągłe w (D); jeżeli x i y są funkcjami zmiennej t, tak że $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, to $f(x, y)$ jest funkcją złożoną zmiennej t, którą można przedstawić w postaci $f\{\varphi(t), \psi(t)\}$, a której pochodna względem zmiennej t równa się

$$f'_x\{\varphi(t), \psi(t)\}\,\varphi'(t)\} + f'_y\{\varphi(t), \psi(t)\}\,\psi'(t),$$

przyczem zakładamy, że pochodne $\varphi'(t)$ i $\psi'(t)$ istnieją i że zmienna t przyjmuje wartości należące do przedziału (α, β), takie, że punkt $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, należy wtedy do D i jest punktem wewnętrznym obszaru D. W znakowaniu Leibniza można ten wzór napisać w postaci:

$$\frac{d f(x, y)}{dt} = f'_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f'_y(x, y)\frac{dy}{dt},$$

przyczem na miejsce x należy podstawić $\varphi(t)$, a na miejsce y funkcję $\psi(t)$.

W znakowaniu różniczkowem mamy

$$d f\{\varphi(t), \psi(t)\} = f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy.$$

Twierdzenie to udowodnimy z największą łatwością, wychodząc z określenia pochodnej, jako granicy ilorazu różnicowego. Zmiennej t dajmy przyrost h,* i niech k i l oznaczają odpowiadające przyrosty zmiennych x i y, t. j. $k = \varphi(t+h) - \varphi(t)$; $l = \psi(t+h) - \psi(t)$; gdy $h \to 0$, to $k \to 0$ i $l \to 0$, z powodu ciągłości funkcji $\varphi(t)$ i $\psi(t)$. Zadanie nasze polega na wyznaczeniu granicy wyrażenia

$$\frac{f\{\varphi(t+h), \psi(t+h)\} - f\{\varphi(t), \psi(t)\}}{h} =$$

$$(88)\qquad = \frac{f\{\varphi(t+h), \psi(t+h)\} - f\{\varphi(t+h), \psi(t)\} + f\{\varphi(t+h), \psi(t)\} - f\{\varphi(t)\psi(t)\}}{h} =$$

$$= \frac{f\{\varphi(t) + k, \psi(t) + l\} - f\{\varphi(t) + k, \psi(t)\}}{l} \cdot \frac{l}{h} +$$

$$+ \frac{f\{\varphi(t) + k, \psi(t)\} - f\{\varphi(t), \psi(t)\}}{k} \cdot \frac{k}{h},$$

z tem zastrzeżeniem, że dla $k = 0$, $\dfrac{f\{\varphi(t) + k, \psi(t)\} - f\{\varphi(t), \psi(t)\}}{h}$ należy zastąpić przez $f'_x\{\varphi(t), \psi(t)\}$, a dla $l = 0$, należy

---

* Zakładamy, że ten przyrost h jest na tyle mały, by punkt $x + k = \varphi(t + h)$, $y + h)$, $y + l = \psi(t + h)$ należał również jak i punkt x, y do wspomnianego wyżej obszaru D.

$\dfrac{f\{\varphi(t)+k, \psi(t)+l\} \quad f\{\varphi(t)+k, \psi(t)\}}{l}$ zastąpić przez

$f'_y\{\varphi(t)+k, \psi(t)\}$, (patrz 1. 98).

Ponieważ $\dfrac{l}{h}=\dfrac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}$, $\dfrac{k}{h}=\dfrac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}$,

więc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{l}{h}=\varphi'(t)$; $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}=\varphi'(t)$.

Gdy $h \to 0$, drugą stronę przekształconego wyrażenia na nasz iloraz różnicowy (88) można na mocy twierdzenia na wartość średnią dla funkcji jednej zmiennej (l. 102) napisać w postaci

$$(89)\quad f'_y\{\varphi(t)+k,\ \psi(t)+\theta_1 l\}\cdot\frac{l}{h}+f'_x\{\varphi(t)+\theta_2 k,\ \psi(t)\}\cdot\frac{k}{h},$$

gdzie $0<\theta_1<1$; $0<\theta_2<1$. Tak więc wyrażenie (89) równa się $\dfrac{f\{\varphi(t+h),\ \psi(t+h)\}-f\{\varphi(t),\ \psi(t)\}}{h}$. Gdy $h\to 0$, to zważywszy, że wtedy $k\to 0$, $l\to 0$, wyrażenie (89) w granicy daje

$$f'_y\{\varphi(t),\ \psi(t)\}\cdot\psi'(t)+f'_x\{\varphi(t),\ \psi(t)\}\varphi'(t),$$

na mocy ciągłości pochodnych cząstkowych f'_y i f'_x. Twierdzenie nasze zostało więc udowodnione.

Otrzymany wzór można napisać:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Jako przypadek szczególny, niech będzie $\varphi(t)=t$, t. j. $a=t$; y zaś jak dawniej niech będzie dowolną funkcją $\psi(t)$ zmiennej t, albo x, ponieważ $t=x$. Funkcja $f\{\varphi(t),$ $\psi(t)$ przybiera postać $f\{t, \psi(t)\}$ albo $f\{x, \psi(x)\}$.

Pochodną tej funkcji względem t albo x będzie

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dt};$$

widzimy więc, że należy odróżniać $\dfrac{df}{dx}$ od $\dfrac{\partial f}{\partial x}$; $\dfrac{df}{dx}$ jest po-

chodną funkcji jednej zmiennej $f\{x, \psi(x)\}$ względem zmiennej niezależnej x, gdy tymczasem $\frac{\partial f}{\partial x}$ oznacza pochodną cząstkową funkcji $f(x, y)$ względem zmiennej x przy y stałem, przyczem, po uskutecznieniu tego różniczkowania cząstkowego y zastąpiono funkcją $\psi(x)$; tak że f oznacza w $\frac{df}{dx}$ i $\frac{\partial f}{\partial x}$ właściwie dwie różne funkcje.

Przykłady:

1) $z = x^2 + y^2$; $x = \frac{1}{t}$, $y = 1 - t^2$; $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y; \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -2t;$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2x}{t^2} - 2y \,.\, 2t = -2\left(\frac{x}{t^2} + 2yt\right) = -2\left\{\frac{1}{t^3} + 2(1-t^2)t\right\}.$$

2) $z = xy$; $x = \sin t$, $y = \cos t$, $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = x; \quad \frac{dx}{dt} = \cos t; \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t;$$

$$\frac{dz}{dt} = y\cos t - x\sin t = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t.$$

Twierdzenie to jest uogólnieniem twierdzenia o funkcji złożonej, które udowodniliśmy przy funkcjach jednej zmiennej (I. 98).

Zastosujemy teraz tylko co uwidocznione twierdzenie (90) dla otrzymania wzoru na wartość średnią dla funkcji dwóch zmiennych.

Utwórzmy funkcję $F(t)$ jednej zmiennej przy pomocy funkcji $f(x, y)$ w sposób następujący:

$$F(t) = f(a + ht, \; b + kt)$$

gdzie a, b, h i k mają wartości ustalone;* przypuszczamy, że

* Należy założyć, że nie tylko punkty (a, b) i $(a+h, b+k)$ należą do obszaru (D), w którym funkcja $f(x, y)$ jest określona i spełnia

w punkcie a, b i w otoczeniu punktu a, b, funkcja $f(x, y)$ posiada pochodne cząstkowe f'_x i f'_y ciągłe.

(91) $$f(a+h, b+k) - f(a, b) = F(1) - F(0),$$

gdyż $$F(1) = f(a+h, b+k); \quad F(0) = f(x, b).$$

Zastosujmy do funkcji $F(t)$ jednej zmiennej t twierdzenie o wartości średniej (l. 98). Otrzymamy (patrz przypisek):

$$F(1) - F(0) = F'(\theta); \text{ gdzie } 0 < \theta < 1;$$

lecz $$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \text{ na mocy (90)},$$

gdzie $$\frac{dx}{dt} = \frac{d(a+ht)}{dt} = h, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d(b+kt)}{dt} = k; \text{ tak że}$$

$$F'(t) = f'_x(a+ht, b+kt).h + f'_y(a+ht, b+kt).k.$$

Stąd wzór (91) przyjmie postać

(92) $$\begin{gathered} f(a+h, b+k) - f(a, b) = F'(\theta) = \\ = h.f'_x(a+\theta h, b+\theta k) + k.f'_y(a+\theta h, b+\theta k), \end{gathered}$$

gdzie $0 < \theta < 1$.

Jest to wzór na wartość średnią dla funkcji dwóch zmiennych. Wzór (92) można jeszcze napisać w postaci $f(M') - f(M) = h.f'_x(P) + k.f'_y(P)$, gdzie punkt P leży na odcinku $M'M$, łączącym punkty M i M'; t. j. różnica dwóch wartości funkcji $f(x, y)$ w punktach M' i M równa się sumie iloczynów przyrostów odpowiednich zmiennych przez wartości odpowiednich pochodnych cząstkowych w punkcie P.

Ponieważ zakładamy ciągłość funkcji f'_x i f'_y w punkcie a, b, możemy wzór (92) przedstawić jeszcze inaczej; mianowicie

---

warunki założenia, ale także i punkt $(a + th, b + tk)$, gdzie t zmieniać się może od zera do jedności. Otóż to będzie spełnione, o ile wspomniany obszar D jest wypukły, bo wtedy każdy odcinek, łączący dwa dowolne punkty takiego obszaru całkowicie należy do tegoż obszaru.

$$f'_x(a+\theta h, b+\theta k) = f'_x(a,b) + \varepsilon_1,$$
$$f'_y(a+\theta h, b+\theta k) = f'_y(a,b) + \varepsilon_2,$$

gdzie ε_1 i ε_2 dążą do zera, gdy $h \to 0$, $k \to 0$.

W takim razie

(93) $f(a+h, b+k) - f(a,b) = hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b) + \varepsilon_2 . h + \varepsilon_2 k.$

Jeżeli zmienne $h \to 0$ i $k \to 0$ będziemy uważali za małe pierwszego rzędu, to

$$hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b)$$

będzie częścią główną (l. 107) poprzedniego wyrażenia, czyli różnicy $f(a+h, b+k) - f(a,b)$, o ile nie jest jednocześnie $f'_x(a,b) = 0$ i $f'_y(a,b) = 0$.

Ta część główna różnicy $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ jest więc funkcją linjową przyrostów h i k zmiennych niezależnych x i y; spółczynnikami są pochodne cząstkowe $f'_x(a,b)$ i $f'_y(x,b)$. Współczynniki te, jak łatwo widzieć, są wyznaczone jednoznacznie, t. j. jeżeli część główna różnicy $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ jest napisana w postaci $A.h + B.k$, to $A = f'_x(a,b)$, $B = f'_y(a,b)$; oczywiście, funkcje pochodne f'_x i f'_y są, na mocy założenia, ciągłe. Jeżeli $Ah + Bk$ jest częścią główną różnicy $f(a+h, b+k) -$ $- f(a,b)$, to znaczy, że

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = (A+\eta_1) h + (B+\eta_2) k,$$

gdzie $\eta_1 \to 0$, $\eta_2 \to 0$, gdy h i k zmierzają do zera. Lecz z (93) wynika

$$(A+\eta_1) h + (B+\eta_2 k = [f'_x(a,b) + \varepsilon_1] h + [f'_y(a,b) + \varepsilon_2] k,$$

czyli

$$\{A - f'_x(a,b)\} h + \{B - f'_y(a,b)\} k = \lambda_1 h + \lambda_2 k,$$

gdzie $\lambda_1 \to 0$, $\lambda_2 \to 0$, gdy k i h zmierzają do zera.

Jeżeli $\varepsilon > 0$ oznacza dowolnie małą liczbę, to można znaleźć taką liczbę $\eta > 0$, że

(94) $\{A - f'_x(a,b)\} h + \{B - f'_y(a,b)\} | < \varepsilon \{|h| + |k|\},$

o ile tylko $|h|<\eta$, $|k|<\eta$; biorąc $0<|h|<\eta$, $k=0$, wymienione warunki stosowalności wzoru są spełnione, skąd

$$|A-f'_x(a,b)|\,.\,|h|<\varepsilon|h|, \text{ czyli } |A-f'_x(a,b)|<\varepsilon;$$

ponieważ ε jest liczbą dowolnie małą, musi więc być

$$A=f'_x(a,b).$$

Tak samo znajdziemy $B=f'_y(a,b)$.

Możemy w różnicy $f(a+h, b+k)-f(a,b)$ uwydatnić dalsze wyrazy drugiego, trzeciego rzędu; sprawę tę wyjaśnimy, gdy udowodnimy twierdzenie Taylora dla funkcji dwóch zmiennych.

111. *Różniczka funkcji dwóch zmiennych.*

Część główna różnicy $f(x+h, y+k)-f(x,y)$, o której była tylko co mowa, zasługuje na specjalną uwagę. O ile $f'_x(x,y)$ i $f'_y(x,y)$ istnieją, to funkcję linjową względem h i k, t. j.

$$f'_x(x,y)\,.\,h+f'_y(x,y)\,.\,k$$

nazywamy różniczką funkcji $f(x,y)$ i oznaczamy przez $df(x,y)$, tak że

(94) $$df(x,y)=f'_x(x,y)\,.\,h+f'_y(x,y)\,.\,k.$$

Udowodniliśmy poprzednio, że to wyrażenie jest częścią główną różnicy $f(x+h, y+k)-f(x,y)$, o ile pochodne cząstkowe f'_x i f'_y są ciągłe. Wielkości h i k są ustalone, niezależnie od tego, do jakiej funkcji $f(x,y)$ stosujemy wzór (94). Niech, np., $f(x,y)=x$, $f'_x=1$, $f'_y=0$,

$df=dx=h$; tak samo, gdy $f(x,y)=y$,

$df=dy=k$.

Możemy więc (94) napisać w postaci:

(95) $$df(x,y)=f'_x(x,y)\,dx+f'_y(x,y)\,dy.$$

Możemy w ten sam sposób obliczyć różniczkę różniczki pierwszej, czyli różniczkę drugą albo rzędu drugiego. W tych rachunkach $dx=h$ i $dy=k$, różniczki zmiennych niezależnych są stałemi. Otrzymamy

$$d^2f(x,y)=f''_{xx}(x,y)\,dx^2+2f''_{xy}(x,y)\,dx\,dy+f''_{yy}(x,y)\,dy^2,$$

pamiętając, że $f''_{xy}=f''_{yx}$.

Przy sposobności należy zwrócić uwagę na następującą okoliczność: wzory (95) i (90) formalnie są identyczne, gdyż pomnożywszy wszystkie wyrazy wzoru (90) przez dt, otrzymamy wzór (95), tymczasem te wzory były otrzymane przy zupełnie różnych założeniach, mianowicie, wzór (90) otrzymaliśmy, zakładając, że x i y są funkcjami jednej zmiennej niezależnej t; tymczasem we wzorze (95) x i y były niczem niezwiązanemi zmiennemi niezależnemi. A więc otrzymujemy stąd ważny wniosek: Wzór (95) zachodzi, niezależnie od tego, czy zmienne x i y są od siebie zależne czy niezależne.

Łatwo uogólnić poprzednią uwagę i na ten przypadek, gdy w $f(x,y)$, zmienne x i y są funkcjami dwóch zmiennych niezależnych u i v, tak że $x=\varphi(u,v)$; $y=\psi(u,v)$. Funkcja $f(x,y)$, jako funkcja zmiennych u i v przybiera postać $f\{\varphi(u,v),\psi(u,v)\}$. Przypuszczamy, że dla wartości u i v spełniających warunki $a_1\leqslant u\leqslant b_1$, $a_2\leqslant v\leqslant b_2$, x i y czyli funkcje $\varphi(u,v)$ i $\psi(u,v)$ spełniają nierówności

$$c_1\leqslant x\leqslant d_1,\quad c_2\leqslant y\leqslant d_2.$$

Jeżeli funkcje $\varphi(u,v)$ i $\psi(u,v)$ są funkcjami ciągłemi w punkcie u,v i jeżeli $f(x,y)$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, to $f\{\varphi(u,v),\ \psi(u,v)\}$ jest funkcją ciągłą zmiennych u i v. Dowód jak dla funkcji złożonej jednej zmiennej (I. 98). Zakładamy ponadto, że w rozpatrywanym obszarze istnieją pochodne $\varphi'_u(u,v)$, $\varphi'_v(u,v)$, $\psi'_u(u,v)$ i $\psi'_v(u,v)$, a oprócz tego pochodne f'_x i f'_y nie tylko istnieją ale są ciągłe w prostokącie

$$c_1\leqslant x\leqslant d_1;\quad c_2\leqslant y\leqslant d_2.$$

Mamy $\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\,\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\,\dfrac{\partial y}{\partial u}$, na mocy wzoru (90), bo o ile $v=$stałej, funkcja $f(x,y)$ staje się funkcją jednej

zmiennej u i wzór (90) może być zastosowany, z tą jednak zmianą, że pochodne x i y czyli $\varphi(u,v)$ i $\psi(u,v)$ względem u są tu pochodnemi cząstkowemi (druga zmienna v ma tu wartość stałą).

Tak samo

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

utwórzmy teraz różniczkę funkcji $f\{\varphi(u,v),\psi(u,v)\}$ dwóch zmiennych niezależnych u i v

$$df\{\varphi(u,v),\psi(u,v)\}=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv,$$

według (95), czyli, podstawiając tylko co otrzymane wartości na $\frac{\partial f}{\partial u}$ i $\frac{\partial f}{\partial v}$, otrzymamy,

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv,$$

czyli

(96) $$df=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right);$$

lecz

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\varphi'_u(u,v),\ \frac{\partial x}{\partial v}=\varphi'_v(u,v),\ \frac{\partial y}{\partial u}=\psi'_u(u,v),\ \frac{\partial y}{\partial v}=\psi'_v(u,v):$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv=d\varphi(u,v)=dx,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv=d\psi(u.v)=dy.$$

Podstawiając te wartości w (96) będziemy mieli wzór

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

t. j. wzór (95), jak dla zmiennych niezależnych, choć tu $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, tak że zmiennemi niezależnemi są u i v.

112. *Twierdzenie i wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych.*

Jest to uogólnienie wzoru na wartość średnią, z uwzględnieniem pochodnych rzędów wyższych. Niech będzie $f(x, y)$ funkcją dwóch zmiennych: pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są f'_x i f'_y albo $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$; pochodnych drugiego rzędu mamy trzy:

$$f''_{x^2},\ f''_{xy},\ f''_{y^2} \text{ albo } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

pochodnych trzeciego rzędu jest cztery

$$f'''_{x^3},\ f'''_{x^2y},\ f'''_{xy^2},\ f'''_{y^3} \text{ albo } \frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3};$$

gdyż, np., $f'''_{xyx} = f'''_{x^2y} = f'''_{yx^2}$, t. j., jak wiemy, wynik nie zależy od porządku (patrz l. 109), czyli otrzymamy tę samą funkcję, niezależnie od tego, czy utworzymy naprzód pochodną $f(x, y)$ względem x, potem względem y, a potem względem x; czy też utworzymy pochodną cząstkową dwa razy względem x, a potem względem y, czy wreszcie raz względem y, a potem dwa razy względem x. Poprzednio (l. 109) udowodniliśmy, że $f''_{xy} = f''_{yx}$; łatwo widzieć, że stąd wynika wniosek ogólny, tyczący się niezależności pochodnej cząstkowej od porządku wykonanych różniczkowań, założywszy, naturalnie, istnienie odpowiednich pochodnych cząstkowych i ich ciągłość.

Stąd wynika zasada ogólna, że przy znakowaniu pochodnych cząstkowych funkcji $f(x, y)$ wystarczy wskazać ile było różniczkowań względem x i ile było różniczkowań względem y, niezależnie od tego, jak są poprzeplatane.

Mamy więc $n+1$ pochodnych cząstkowych n^{go} rzędu

$$f^{(n)}_{x^n},\ f^{(n)}_{x^{n-1}y},\ \dots f^{n}_{y^n}$$

albo

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n},\ \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y},\ \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2}, \dots,\ \frac{\partial^n f}{\partial x . \partial y^{n-1}},\ \frac{\partial^n f}{\partial y^n}.$$

Przypuśćmy, że w punkcie a, b i w otoczeniu tego

punktu pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y)$ istnieją i są ciągłe, aż do rzędu n^{go} włącznie.

Utwórzmy funkcję pomocniczą zmiennej niezależnej t, $F(t) = f(a + ht, b + kt)$; chodzić nam będzie o różnicę

$$(97) \qquad f(a + h, b + k) = F(1) - F(0);$$

otrzymamy żądany wzór, jeżeli zastosujemy twierdzenie Taylora (l. 104) do funkcji jednej zmiennej $F(t)$, by przekształcić różnicę $F(1) - F(0)$ przy pomocy tego wzoru. Otrzymamy

$$(98) \quad F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \frac{1}{3!} F'''(0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!} F^{(n-1)}(0) + R_n,$$

gdzie $R_n = \dfrac{(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} F^{(n)}(\theta)$, gdzie $0 < \theta < 1$.

$$F(t) = f(x, y),\ x = a + ht,\ y = b + kt;\ F'(t) = f'_x(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} +$$

$$+ f'_y(x, y) \frac{dy}{dt}, \text{ na mocy wzoru (90), czyli}$$

$$F'(t) = f'_x(a + ht, b + kt) \cdot h + f'_y(a + ht, b + kt) k;$$

$$F''(t) = \frac{\partial}{\partial x} \{f'_x(x, y) h^2 + f'_x(x, y) k\} \frac{dx}{dt} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \{f'_x(x, y) h + f'_y(x, y) k\} \frac{dy}{dt} = f''_{x^2}(a + ht, b + kt) h^2 +$$

$$+ 2 f''_{xy}(a + ht, b + kt) hk + f''_{y^2}(a + ht, b + kt) k^2$$

$$F'''(t) = f'''_{x^3}(a + ht, b + kt) h^3 + 3 f'''_{x^2y}(a + ht, b + kt) h^2 k +$$

$$+ 3 f'''_{xy^2}(a + ht, b + kt) hk^2 + f'''_{y^3}(a + ht, b + kt)$$

. . . .

Zapomocą indukcji matematycznej możemy uzasadnić wzór na pochodną rzędu p

$$F^{(p)}(t) = h^p f^{(p)}_{x^p}(a + ht, b + kt) + C^1_p h^{p-1} k\, f^{(p)}_{x^{p-1}y}(a + ht, b + kt) +$$

$$+ C^2_p h^{p-2} k^2 f^{(p)}_{x^{p-2}y^2}(a + ht, b + kt) + \ldots$$

$$\ldots + C^{p-1}_p h k^{p-1} f^{p}_{xy^{p-1}}(a + ht, b + kt) + k^p . f^{(p)}(a + ht, b + kt);$$

gdzie C_p^k są to spółczynniki rozwinięcia dwumianu; a więc (97) i (98):

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=F(1)-F(0)=f'_x(a,b).h+$$
$$+f'_y(a,b).k+\frac{1}{2!}\{f''_{x^2}(a,b).h^2+2f''_{xy}(a,b)hk+f''_{y^2}(a,b)k^2\}+$$
$$+\frac{1}{3!}\{f'''_{x^3}(a,b).h^3+3f'''_{x^2y}(a,b)h^2k+3f'''_{xy^2}(a,b)hk^2+$$
$$+f'''(a,b)k^3\}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\Big\{f^{(n-1)}_{x^{n-1}}(a,b)h^{n-1}+$$
$$+C^1_{n-1}f^{(n-1)}_{x^{n-2}y}(a,b)h^{n-2}k+\ldots+C^{n-2}_{n-1}f^{(n-1)}_{xy^{n-2}}(a,b)hk^{n-2}+$$
$$+f^{(n-1)}_{y^{n-1}}(x,b)k^{n-1}\Big\}+R_n.$$

gdzie

$$R_n=\frac{(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!}\Big\{f^{(n)}_{x^n}(a+\theta h,b+\theta k)h^n+$$
$$+C^1_n f^{(n)}(a+\theta h,b+\theta k)h^{n-1}k+\ldots+f^{(n)}_{y^n}(a+\theta h,b+\theta k).k^n\Big\}$$

W otrzymanym wzorze wyrażenia w nawiasach są analogiczne do rozwinięć odpowiednich potęg dwumianu Newtona. Z powodu tej analogji oznaczają niektórzy p^{ty} wyraz wzoru Taylora w postaci symbolicznej przez

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n)}_{a,b};$$

znaczenie tego symbolu jest jasne; postępujemy jak przy rozwinięciu p^{tej} potęgi dwumianu zawartego w nawiasie z tem zastrzeżeniem, że należy wykładnik w $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ zastąpić przez odpowiedni rząd pochodnej, t. j.

$$C_p^m\left(\frac{\partial f}{\partial x}h\right)^m\left(\frac{\partial f}{\partial x}k\right)^{p-m},$$

np., należy zastąpić przez

$$C_p^m h^m k^{p-m}\frac{\partial^p f}{\partial x^m\,\partial y^{p-m}},\ \text{czyli zamiast}\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^m\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{p-m}$$

należy napisać $\dfrac{\partial^p f}{(\partial x)^m(\partial y)^{p-m}}$

Przyjąwszy to znakowanie, będziemy mogli wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych napisać w postaci symbolicznej

$$f(a+h, b+k)-f(a,b)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(1)}_{a,b}+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(2)}_{a,b}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(3)}_{a,b}+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n-1)}_{a,b}+$$
$$+\frac{(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n)}_{a+\theta h,\, b+\theta k};$$

należy pamiętać, że wskaźniki a, b i $a+\theta h, b+\theta h$ u dołu tych symboli wskazują, że należy podstawić w odpowiednie wyrażenia po ich rozwinięciu na miejscu x liczbę a, na miejscu y liczbę b, ewentualnie $a+\theta h$ na miejsce x, $b+\theta k$ na miejsce y; $0<\theta<1$.

113. *Maximum i minimum funkcji dwóch zmiennych.* Przypuśćmy, że $z=f(x,y)$ jest funkcją dwóch zmiennych, określoną w obszarze (D) i niech a, b oznacza punkt wewnętrzny tego obszaru; wtedy istnieje otoczenie tego punktu M, o spółrzędnych a, b takie, że wszystkie punkty tego otoczenia należą do (D).

Określenie. Funkcja $f(x,y)$ posiada w punkcie M o spółrzędnych a, b na płaszczyźnie xoy, *maximum* (*minimum*), jeżeli istnieje otoczenie punktu M, należące do (D) i takie, że w każdym punkcie P o spółrzędnych x, y tego otoczenia $f(P)<f(M)$ czyli $f(x,y)<f(a,b)$, t. j. wartość funkcji w każdym punkcie tego otoczenia jest mniejsza od wartości w punkcie M [dla minimum przeciwnie $f(P)>f(M)$, t. j. wartość funkcji w każdym punkcie tego otoczenia jest większa od wartości w punkcie M].

Wspólną nazwą dla maximum i minimum jest *extremum*.

Twierdzenie. Warunkiem koniecznym (ale niedostatecznym) istnienia extremum w punkcie M jest

$$f'_x(M)=0,\ f'_y(M)=0,\ \text{t. j.}$$
$$f'_x(a,b)=0,\ f'_y(a,b)=0.$$

Dowód jest bezpośredni. Śród wartości funkcji $f(x,y)$ w otoczeniu punktu M weźmiemy pod uwagę najprzód te, które odpowiadają stałemu $y=b$, następnie te, dla których $x=a$, a y zmienne; jasna rzecz, że wtedy mamy do czynienia z funkcjami zmiennej $f(x,b)$ i $f(a.y)$; ponieważ $f(a,b)$ musi być extremum i dla wartości wyrażonych przez $f(x,b)$ i dla wartości $f(a,y)$, więc, na zasadzie znanego twierdzenia o extremum funkcji jednej zmiennej (l. 105), pochodna funkcji $f(x;b)$ względem x musi się równać zeru; tak samo pochodna funkcji $f(a,y)$ względem y musi także się równać zeru. Lecz pochodna funkcji $f(x,b)$ względem x w punkcie $x=a$, jest to $f'_x(a,b)$; tak samo pochodna funkcji $f(a,y)$ względem y w punkcie $y=b$, jest to $f'_y(a,b)$; jeżeli więc zachodzi extremum, to

$$f'_x(a,b)=0,\ f'_y(a,b)=0. \tag{100}$$

Przypuśćmy, że warunki konieczne (100) są spełnione. By zbadać, czy zachodzi wtedy extremum i czy to extremum jest maximum czy minimum, należy uwzględnić wzór Taylora (99) dla $n=2$. Uwzględniając (100), otrzymamy

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{1}{2!}\{f'_{x^2}(a+\theta h,b+\theta k)^2+ \tag{99}$$
$$+2f''_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)hk+f''_{y^2}(a+\theta h,b+\theta k).k^2\},$$

gdzie ostatni wyraz jest resztą R_2, w założeniu $p=n=2$.

Dalsze badanie będzie zależało od zachowania się tej reszty w otoczeniu wartości $h=0$, $k=0$.

Mamy do zbadania wyrażenie drugiego stopnia i jednorodne względem h i k. Taki wielomian nazywa się formą kwadratową. Kładąc oznaczenia

$$f''_{x^2}(a+\theta h, b+\theta k)=A,\ f''_{xy}(a+\theta h, b+\theta k)=B$$
$$f''_{y^2}(a+\theta h, b+\theta k)=C,$$

forma kwadratowa, którą mamy zbadać przyjmuje postać następującą:

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2;$$

dla nas ważne ma znaczenie, czy taka forma kwadratowa może się stać równą zeru przy wartościach h i k innych niż $h=0$, $k=0$, czy też nie; zależy to, jak zobaczymy, od spółczynników A, B, C formy. Jeżeli $A=0$, to mamy $2Bhk+Ck^2=k(2Bh+Ck)$ i forma może być dodatnia, ujemna lub równa zeru, zależnie od wartości h i k. Jeżeli więc są formy, które zachowują stale ten sam znak przy wszystkich wartościach h i k, to należy takowych szukać śród form, dla których $A \neq 0$. O ile $A \neq 0$, to

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{1}{A}\{(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2\};$$

stąd wniosek następujący: 1) jeżeli $AC-B^2>0$, to $A(Ah^2+2Bhk+Ck)>0$ dla każdej pary wartości h i k z wyjątkiem $h=0$, $k=0$; 2) jeżeli $AC-B^2=0$, to $A(Ah^2+2Bhk+Ck^2)\geqslant 0$, przyczem forma może się równać zeru nie tylko gdy $h=0$, $k=0$, ale i przy dowolnem k i przy $h=-\frac{B}{A}k$; 3) jeżeli $AC-B^2<0$, to Ah^2+ $+2Bhk+Ck^2$ przyjmuje wartości tak dodatnie jak i ujemne czy zerowe.

Tak więc formy kwadratowe, które mają wartości zawsze dodatnie albo zawsze ujemne, dla wszystkich par wartości h i k z wyjątkiem $h=0$, $k=0$ są to te i tylko te, których spółczynniki A, B i C czynią zadość nierówności

$$AC-B^2>0;$$

wtedy ten stały znak jest taki sam, jak znak spółczynnika A (albo C, bo A i C muszą mieć wtedy ten sam znak).

Wróćmy teraz do naszego zadania o istnieniu extremum. Jeżeli funkcja $f(x, a)$ w otoczeniu punktu M o spółrzędnych a i b posiada pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego i jeżeli te pochodne są ciągłe w tem otoczeniu, jeżeli

$$f'_x(a, b) = 0, \quad f'_y(a, b) = 0,$$

i jeżeli

$$f''_{x^2}(, b) \,.\, f''_{y^2}(a, b) - \{f''_{xy}(a, b)\}^2 > 0,$$

to w punkcie M zachodzi extremum, przytem to extremum jest maximum, jeżeli $f''_{x^2}(a, b) < 0$; jest zaś minimum, gdy $f''_{x^2}(a, b) > 0$.

W rzeczy samej, można znaleźć takie otoczenie punktu M, by funkcja ciągła punktu M posiadała w tem otoczeniu taki sam znak, jak w punkcie M (l. 83, 84).

Niech więc $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ oznaczają dwie takie liczby, że skoro tylko $|h| < \eta_1$, $|k| <_2$ to $A = f''_{x^2}(a + \theta h, b + \theta k)$ ma taki sam znak, jak $f''_{x^2}(a, b)$ i

$$AC - B^2 = f''_{x^2}(a + \theta h, b + \theta k) \,.\, f''_{y^2}(a + \theta h, b + \theta k) -$$
$$- \{f''_{xy} a(+ \theta h; b + \theta k)\}^2$$

ma taki sam znak, jak

$$f''_{x^2}(a, b) \,.\, f''_{y^2}(a, b) - \{f''_{xy}(a, b)\}^2.$$

1) Niech $f''_{x^2}(a, b) \,.\, f''_{y^2}(a, b) - \{f''_{xy}(a, b)\}^2 > 0$; wtedy,

o ile $\quad |h| < \eta_1, \ |k| < \eta_2$

to i $\quad AC - B^2 > 0.$

Ale na mocy (99)

$$f(P) - (M) = f(a + h, b + k) - f(a, b) =$$
$$= \frac{1}{2!} \{Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\},$$

ponieważ forma kwadratowa po stronie drugiej tej równości zachowuje ten sam znak, o ile $|h| < \eta_1$, $|k| < \eta_2$, ale nie jest jednocześnie $h = 0, k = 0$, więc różnica $f(P) - f(M)$ jest stale dodatnia albo stale ujemna, (o ile $P \neq M$). Jeżeli teraz $f''_{x^2}(a, b) > 0$, to i $A > 0$ i ten stały znak jest znakiem $+$,

czyli wtedy $f(P)-f(M)>0$, (P należy do otoczenia punktu M), przyczem nierówność ta jest spełniona zawsze, o ile P należy do otoczenia punktu M (wyrażonego przez nierówności $|h|<\eta_1$, $|k|<\eta_2$, z wyjątkiem $h=k=0$, gdzie $a+h$, $b+k$ są spółrzędnemi punktu P). Widzimy więc, że w tych warunkach zachodzi minimum: wartość funkcji w punkcie M jest mniejsze od wartości funkcji w otoczeniu punktu M.

Jeżeli teraz $f''_{x^2}(a,b)<0$, to i $A<0$; stały znak różnicy $f(P)-f(M)$ jest ujemny, t. j. $f(P)-f(M)<0$; widzimy, że wartość funkcji w punkcie M jest większa od wartości funkcji w otoczeniu punktu M. W tych warunkach zachodzi maximum.

2) Jeżeli zaś $f''_{x^2}(a,b)f''_{y^2}(a,b)-\{f''_{xy}(a,b)\}^2<0$, to i $AC-B^2<0$, forma $Ah^3+2Bhk+Ck^2$ dla dowolnie małych wartości h i k,* czyli w dowolnie małem otoczeniu punktu M, może mieć wartości dodatnie lub ujemne; widzimy więc, że $f(P)-f(M)$ jest >0 dla niektórych punktów P w dowolnie małem otoczeniu punktu M, a dla innych punktów P tegoż otoczenia różnica $f(P)-f(M)$ jest znów <0. Stąd wniosek, że w punkcie M funkcja nie powiada ani maximum ani minimum.

Przykłady:

1) Jaki z pośród trójkątów wpisanych w koło ma obwód największy.

Wybieramy jako zmienne niezależne x i y dwa kąty trójkąta wpisanego; trzecim kątem jest $\pi-x-y$. Oznaczmy boki trójkąta przez a, b, c, promień zaś koła danego przez R.

$$\frac{a}{\sin x}=\frac{b}{\sin y}=\frac{c}{\sin(x+y)}=2R \quad (x\neq 0,\ y\neq 0,\ x+y<\pi)$$

$$a=2R\sin x,\quad b=R\sin y,\quad c=2R\sin(x+y).$$

* Jeżeli $Ah^2+2Bhk+Ck$ jest dla pewnej pary wartości h i k, dodatnia albo ujemna, to będzie odpowiednio dodatnia albo ujemna dla pary wartości ρh, ρk, gdzie $|\rho|$ liczba dowolnie mała.

A zatem obwód trójkąta

$$2p = 2R\{\sin x + \sin y + \sin(x+y)\}.$$

Oznaczmy $z = \sin y + \sin y + \sin(x+y)$; w takim razie $2p = 2Rz$. Ponieważ R jest stałem i >0, obwód będzie zatem maximum, wtedy, gdy z będzie maximum. Utwórzmy pochodne cząstkowe funkcji z względem x i y i przyrównajmy je do zera:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x + \cos(x+y) = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \cos y + \cos(x+y) = 0;$$

stąd zaś

$$\cos x = \cos y = -\cos(x+y); \ y = 2\pi k \pm x; \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

W zastosowaniu do naszego zadania tylko $y = x$ daje kąty, których suma mniejsza jest od π. Tak więc,

$$\cos x = -\cos 2x, \text{ czyli}$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0; \ \cos x = \tfrac{1}{2} \text{ lub } \cos = -1;$$

$$x = \arccos\tfrac{1}{2} \text{ lub } x = \arccos(-1);$$

z tych wartości tylko $x = \frac{\pi}{3}$ jest możliwa w trójkącie; ponieważ $\cos y = \cos x$, więc $y = \frac{\pi}{3}$; trzeci kąt też $= \frac{\pi}{3}$.

A zatem żądanym trójkątem jest trójkąt równoboczny. Możemy sprawdzić, że pochodne drugie mają wartości, czyniące zadość warunkom na maximum. W rzeczy samej

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x - \sin(x+y); \text{ dla } x = y = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sqrt{3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y); \text{ dla } x = y = \frac{\pi}{3}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x - \sin(x+y); \text{ a więc także } = -\sqrt{3}.$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \tfrac{3}{4}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 3; \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$; t. j. warunki dla maximum są spełnione.

2) Z pośród prostopadłościanów o tej samej objętości znaleźć prostopadłościan o najmniejszej powierzchni.

Niech daną objętością będzie a^3. Oznaczmy wymiary szukanego prostopadłościanu przez x, y i z, zaś jego powierzchnię przez u.

$$xyz = a^3,$$
$$u = xy + xz + yz.$$

Z pierwszego równania mamy: $z = \frac{a^3}{xy}$, a zatem

$$u = xy + \frac{a^3}{y} + \frac{a^3}{x}.$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = y - \frac{a^3}{x^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{a^3}{y^2}$; przyrównując pochodne do zera, mamy równania:

$$x^2 y = a^3,$$
$$xy^2 = a^3;$$

stąd $x = y = a$; a zatem także $z = a$.

Szukany prostopadłościan jest więc sześcianem. Dla sprawdzenia, czy spełnione są warunki dla minimum, utwórzmy pochodne drugie:

$$f''_{x^2} = \frac{2a^3}{x^3}; \quad f''_{xy} = 1; \quad f''_{y^2} = \frac{2a^3}{y^3};$$

gdy podstawimy $x = a$, $y = a$, otrzymamy:

$$f''_{x^2}(a, a) = 2; \quad f''_{xy}(a, a) = 1, \quad f''_{y^2}(a, a) = 2.$$
$$\{f''_{xy}(a, a)\}^2 = 1; \quad f_{x^2}(a, a) \,.\, f''_{y^2}(a, a) = 4,$$

czyli $$\{f''_{xy}(a, a)\}^2 < f''_{x^2}(a, a) \,.\, f''_{y^2}(a, a);$$

oprócz tego $f''_{x^2}(a, a) > 0$; warunki dla minimum są spełnione.

114. *Pochodna funkcji uwikłanej.*

Przypuśćmy, że funkcja $f(x, y)$ i jej pochodne cząstkowe $f'_x(x, y)$ i $f'_y(x, y)$ są ciągłe w otoczeniu punktu M o spółrzędnych a i b; przypuśćmy dalej, że $f(a, b) = 0$, a $f'_y(a, b) \neq 0$.

Z powodu ciągłości funkcji pochodnej $f'_y(x, y)$ w punkcie M, istnieje takie otoczenie tego punktu, w którem $f'_y(x, y)$ ma ten sam znak, co w punkcie M, t. j. co $f'_y(a, b) \neq 0$. Przypuśćmy, np., że $f'_y(a, b) > 0$; więc i $f'_y(x, y) > 0$ we wzmiankowanem otoczeniu punktu M; lecz, jeżeli $f'_y(x, y) > 0$, to znaczy, że funkcja $f(x, y)$ przy stałem x, jako funkcja zmiennej y jest funkcją rosnącą w pewnem otoczeniu punktu M. Wtedy spełnione są warunki, na mocy których (patrz l. 85) wyznaczona jest jednoznacznie pewna funkcja $y = \varphi(x)$, w przedziale $(a - \eta, a + \eta)$, która dla $x = a$, daje $y = b$, i taka, że $f\{x, \varphi(x)\} = 0$ dla wszelkich wartości zmiennej x w przedziale $(a - \eta, a + \eta)$.

Udowodnimy teraz, że owa funkcja $y = \varphi(x)$ posiada pochodną w przedziale $(a - \eta, a + \eta)$. Niech $x = a + h$, gdzie $|h| < \eta$, wtedy $y = b + k = \varphi(a + h)$; $k = \varphi(a + h) - \varphi(a)$;

Mamy dalej:

$$f(x, y) = 0, \text{ gdzie } y = \varphi(x); \quad f(a, b) = 0$$

A więc $f(x, y) - f(a, b) = 0$; lecz wzór na wartość średnią (l. 110) daje $f(x, y) - f(a, b) = hf'_x(a + \theta h, b + \theta k) + kf'_y(a + \theta h, b + \theta k = 0$; a więc

$$\frac{\varphi(a + h) - \varphi(a)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{f'_x(a + \theta h, b + \theta k)}{f'_y(a + \theta h, b + \theta k)}, \quad (0 < \theta < 1),$$

ponieważ $\qquad f'_y(a + \theta h, b + \theta k) \neq 0.$

$$\varphi'(a) = \lim \frac{\varphi(a + h) - \varphi(a)}{h} = -\lim \frac{f'_x(a + \theta h, b + \theta k)}{f'_y(a + \theta h, b + \theta k)} =$$

$$= -\frac{\lim f'_x(a + \theta h, b + \theta k)}{\lim f'_y(a + \theta h, b + \theta k)} = -\frac{f'_x(a, b)}{f'_y(a, b)}, \text{ czyli}$$

$$(100) \qquad \varphi'(a) = -\frac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)}.$$

115. *Funkcje uwikłane. Metoda przybliżeń kolejnych.*

Wróćmy do równania $f(x,y)=0$. Poprzednio (I. 85) udowodniliśmy, iż przy spełnianiu pewnych warunków równanie to określa w pewnym przedziale zmiennej x, funkcję $y=\varphi(x)$ tej zmiennej, taką, że $f\{x,\varphi(x)\}=0$ dla każdej wartości zmiennej x we wzmiankowanym przedziale.

Nie od rzeczy będzie wskazać metodę, która pozwala istotnie obliczyć wartości owej funkcji $y=\varphi(x)$ z dowolną dokładnością, przytem w ten sposób otrzymujemy nowy dowód wspomnianego twierdzenia o funkcji uwikłanej.

Niech $f(\xi,\eta)$ oznacza funkcję, która jest ciągła i posiada pochodną ciągłą w otoczeniu punktu M o spółrzędnych $\xi=a$, $\eta=b$, czyli w otoczeniu punktu a,b. Przypuśćmy dalej, że $f(a,b)=0$, lecz $f'_\eta(a,c)\neq 0$. Wtedy istnieje w otoczeniu punktu a funkcja $\eta=\varphi(\xi)$, która czyni zadość równaniu $f(\xi,\eta)=0$ i dla $\xi=a$ przyjmuje wartość $\eta=b$ i jest przez te warunki w otoczeniu punktu a wyznaczona jednoznacznie.

Twierdzenie to udowodniliśmy poprzednio (I, 85). Teraz podamy inny dowód, z którego będzie wynikać możność liczbowego wyznaczenia wartości η funkcji $\varphi(\xi)$ zmiennej ξ.

Zauważymy przedewszystkiem, że przez zmianę zmiennych możemy uczynić $a=0$, $b=0$, wystarczy podstawić $\xi=a+x$, $\eta=a+y$; nasze równanie $f(\xi,\eta)=0$ zamieni się na $f(a+x,b+y)=0$; oznaczmy $f(a+x,b+y)$ przez $F(x,y)$. Równanie $f(\xi,\eta)=0$ zamienia się na $F(x,y)=0$. Zadanie sprowadziliśmy do wyznaczenia funkcji $y=\varphi(x)$, w otoczeniu punktu $\varphi=0$, wiedząc, że dla $x=0$, $y=0$. Łatwo sprawdzić, że ciągłość funkcji $f(\xi,\eta)$ względem

zmiennych ξ, η pociąga ciągłość funkcji $F(x, y)$ względem x i y w otoczeniu punktu $x=0$, $y=0$; to samo tyczy się pochodnej cząstkowej $F_y(x, y)$; wartość tej pochodnej w punkcie $x=0$, $y=0$ równa się wartości pochodnej $f'_\eta(\xi, \eta)$ w punkcie $\xi=a$, $\eta=b$, a więc $F_y(0,0) \neq 0$ na zasadzie założenia.

Dla funkcji $F(x, x)$ są więc spełnione wszystkie warunki, które założyliśmy co do funkcji $f(\xi, \eta)$, z tą tylko różnicą, że punkt $x=a$, $y=b$ jest teraz punktem $x=0$, $y=0$. Niech $|x| \leqslant h$, $|y| \leqslant k$ określa obszar D, czyli to otoczenie punktu początkowego, w którem spełnione są warunki założenia. Liczbę $F_y(0,0) \neq 0$ oznaczmy przez $1/m$, tak, iż $m = \frac{1}{F(0,0)} \neq 0$; liczba ta jest zawsze wyznaczona. Równanie

$$(101) \qquad F(x, y) = 0$$

zastąpić możemy równaniem najzupełniej mu równoważnem

$$(102) \qquad y = y - m \,.\, F(x, y);$$

gdyż spełnienie równania (102) pociąga zachodzenie równania (101) i odwrotnie.

Prawą stronę równania (102) oznaczmy przez $\Phi(x, y = = y - m \,.\, F(x, y)$, tak, że równanie (102) przyjmie postać

$$(103) \qquad y = \Phi(x, y).$$

W obszarze (D) funkcja $\Phi(x, y)$ i jej pochodna cząstkowa $\Phi'_y(x, y)$ spełniają warunki ciągłości te same, co i funkcja $F(x, y)$. Ponadto mamy $\Phi(0,0)=0$ i $\Phi'_y(x, y) = = -m F'_y(x, y) + 1$; w punkcie $x=0$, $y=0$, $\Phi'_y(0,0) = = -m \,.\, F'_y(0,0) + 1 = 0$. Ponieważ $\Phi'_y(x, y)$ jest funkcją ciągłą punktu x, y i ponieważ $\Phi'_y(x, y)$ przyjmuje wartości bliskie zeru, możemy więc założyć, zmniejszywszy w razie potrzeby liczby h i k, że w obszarze D mamy zawsze

$$(104) \qquad |\Phi'_y(x, y)| < \lambda < 1, \quad (\lambda > 0).$$

Po tych przygotowaniach, możemy przystąpić do obliczania kolejnych przybliżeń wartości zmiennej y, które w granicy dadzą nam szukaną funkcję $y=\varphi(x)$.

Połóżmy kolejno

$$(105)\qquad y_1=\Phi(x,0),\ y_2=\Phi(x,y_1),\ y_3=\Phi(x,y_2),\ldots$$
$$\ldots,\ y_p=\Phi(x,y_{p-1}),\ldots$$

Co do zmiennej x załóżmy, że $|x|\leqslant\eta$, gdzie η jest równą h albo mniejszą od h, ale w każdym razie tak dobraną liczbą, że $|\Phi(x,0)|<(1-\lambda)k$ dla wszystkich wartości x przedziału $(-\eta,+\eta)$; jest to możliwe, gdyż $\lambda<1$, $\Phi(0,0)=0$, $\Phi(x,0)$ jest funkcją ciągłą zmiennej x.

Twierdzę, że wartości otrzymane poprzednio (105) na $y_1, y_2,\ldots$ wszystkie spełniają warunek

$$|y_p|<k,\ (\text{dla } p=1,2,3,\ldots);$$

w rzeczy samej $y_p=\Phi(x,0)\{\Phi(x,y_{p-1})-\Phi(x,0)\}=\Phi(x,0)+$ $+\Phi'_y(x,\theta y_{p-1})y_{p-1}$, (wzór na wartość średnią); stąd

$$(106)\qquad |y_p|<\Phi(x,0)|+|\Phi'_y(x,\theta y_{p-1})|\cdot|y_{p-1}|.$$

Jeżeli $|y_{p-1}|<k$, to, na podstawie (107) także $|x_p|<k$, bo $|y_p|<(1-\lambda)k+\lambda k$, (patrz wzór 102), czyli, istotnie, $|y_p|<k$. Lecz $|y_2|<k$, więc i $|y_2|$, $|y_3|$ i t. d.

Teraz możemy przystąpić do udowodnienia, że ciąg (105) jest zbieżny, t. j., że istnieje $\lim\limits_{p\to\infty} y_p$.

W tym celu zauważymy, że

$$y_p=y_1+(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+\ldots+y_p-y_{p-1});$$

A więc y_p jest sumą częściową p wyrazów szeregu

$$(107)\qquad y_1+(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+\ldots+(y_n-y_{n-1})\ldots$$

Jeżeli więc udowodnimy, że ten szereg jest zbieżny, to tem samem udowodnimy, że $\lim y_p$ istnieje. Ponieważ zakładamy, że $|x|<y$, więc $|y_p|<k$; wtedy możemy napisać

$$y_p-y_{p-1}=\Phi(x,y_{p-1})-\Phi(x,y_{p-2})=\Phi_y(x,\eta_p)(y_{p-1}-y_{p-2}),$$

przez zastosowanie wzoru na wartość średnią, gdzie η_p oznacza liczbę pośrednią między y_{p-1} i y_{p-2}, czyli $|\eta_p| < k$.

Przechodząc do wartości bezwzględnych i na zasadzie (104)

$$|y_p - y_{p-1}| < \lambda . |y_{p-1} - y_{p-2}|; \text{ a więc}$$
$$|y_{p-1} - y_{p-2}| < \lambda |y_{p-2} - y_{p-3}| \text{ i t. d. Stąd}$$
$$|y_p - y_{p-1}| < \lambda^{p-1} |y_1|; \text{ lecz } |y_1| = |\Phi(x, 0)| < (1-\lambda)k.$$

Ostatecznie więc

$$(108) \qquad |y_p - y_{p-1}| < \lambda(1-\lambda) . k.$$

Utwórzmy szereg:

$$(109) \quad (1-\lambda)k + (1-\lambda)k\lambda + (1-\lambda)k\lambda^2 + ... + (1-\lambda)k\lambda^{n-1} + ...$$

Wyrazy szeregu (102) są, co do wartości bezwzględnej, mniejsze od odpowiednich wyrazów szeregu zbieżnego (109). A więc szereg (107) jest bezwzględnie zbieżny.* Oznaczmy przez $\varphi(x)$ sumę tego szeregu, która, oczywiście, jest funkcją zmiennej x. Mamy**

$$\lim_{p \to \infty} y_p = \varphi(x).$$

Funkcja $y = \varphi(x)$ jest funkcją szukaną; czyni ona zadość wszystkim warunkom zadania. W rzeczy samej, dla

---

* Szereg (107) jest nawet jednostajnie zbieżny w $(-\eta, \eta)$ (patrz l. 122). Na tej zasadzie możemy twierdzić, że suma tego szeregu jest funkcją ciągłą zmiennej x w przedziale $(-\eta, \eta)$, gdyż oddzielne wyrazy szeregu (107) są funkcjami ciągłemi.

** Zjawia się pytanie, jaki błąd popełniamy, zastępując granicę y przez wartość przybliżoną y_p; błąd ten równa się, oczywiście, reszcie szeregu (107), t. j. R_p, gdyż

$$y = y_p + R_p;$$

otóż $|R_p|$ jest mniejsze od odpowiedniej reszty szeregu (109); reszta szeregu (109) równa się

$$(1-\lambda)k\lambda^p + (1-\lambda)k\lambda^{p+1} + (1-\lambda)k . \lambda^{p+2} + ... =$$
$$= (1-\lambda)k\lambda^p(1 + \lambda + \lambda^2 + ...) = k\lambda^p.$$

A więc wartość bezwzględna popełnionego błędu jest mniejsza od $k\lambda^p$.

$x=0$, wszystkie wyrazy ciągu (106) równają się zeru, a więc

$$\varphi(0)=\lim y_p=0,$$

gdyż dla $x=0$, $y_p=0$, dla każdego p.

Dalej $y_p=\Phi(x, y_{p-1})$; gdy $|x|\leqslant\eta$, i gdy $p\to\infty$, to $y_p\to\varphi(x)=y$; czyli przechodząc do granicy, otrzymamy $\lim y_p=\lim\Phi(x, y_{p-1})=\Phi(x, \lim y_{p-1})$, t. j. $y=\Phi(x, y)$, gdzie y oznacza $\varphi(x)$.

Równanie (103) jest spełnione.

Możemy teraz udowodnić, że otrzymane rozwiązanie jest jedyne. Przypuśćmy, że stnieje drugie $Y=Y(x)$, tak że

$$Y=\Phi(x, Y),$$

przyczem dla $x=0$, $Y=0$.

Mamy z poprzedniego

$$y_p=\Phi(x, y_{p-1});$$

odejmując

$$Y-y_p=\Phi(x, Y)-\Phi(x, y_{p-1}),$$

czyli, stosując wzór na wartość średnią i uwzględniając (105)

$$|Y-y_p|<\lambda.|Y-y_{p-1}|,$$

$$|Y-y_{p-1}|<\lambda.|Y-y_{p-2}|, \text{ i t. d. Stąd}$$

$$0<|Y-y_p|<\lambda^{p-1}.|Y-y_p|;$$

przechodząc do granicy, gdy $p\to\infty$, otrzymamy

$$\lim|Y-y_p|=0, \text{ gdyż } \lim_{p\to\infty}\lambda^{p-1}=0, (\lambda<1);$$

a więc $Y=\lim y_p=\varphi(x)$, wbrew założeniu, że $Y(x)$ jest rozwiązaniem odmiennem od $\varphi(x)$.

Otrzymaliśmy rozwiązanie $y=\varphi(x)$, wyznaczone tylko w przedziale $(-\eta, \eta)$ zmiennej niezależnej x. Niech $a=+\eta$ lub $-\eta$ i $b=\varphi(\eta)$ lub odpowiednio $\varphi(-\eta)$. Jeżeli w punkcie a, b spełnione są warunki ciągłości funkcji $F(x, y)$ i jej pochodnej cząstkowej $F'_y(x, y)$ i jeżeli $F'(a, b)\neq 0$, to możemy powtórzyć od początku tylko co wyłożone postępowanie; otrzymamy rozwiązanie równania $F(x, y)=0$ wy-

znaczone w postaci $y = \psi(x)$, i określone w przedziale $(a - \eta_1, a + \eta_1)$ wartości zmiennej x. Ten nowy przedział częściowo się pokrywa z poprzednim przedziałem, w którym była określona funkcja $y = \varphi(x)$; z powodu jednoznaczności rozwiązania w tej części wspólnej obu wzmiankowanych przedziałów funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ muszą być identyczne. A więc przyjmiemy funkcję $\psi(x)$ jako przedłużenie funkcji $\varphi(x)$ poza pierwotny przedział $(-\eta, \eta)$. W ten sposób możemy stopniowo postępować dalej, dopóki nie napotkamy takiej wartości zmiennej x, dla której $F(x, y)$ lub $F'_y(x, y)$ przestają być ciągłe lub też $F'_y(x, y) = 0$.

W rozdziale l. 86 rozpatrywaliśmy równanie $f(x, y, z) = 0$, określające funkcję uwikłaną $z = \varphi(x, y)$. Łatwo się przekonać, że założenia rozdziału l. 86 będą spełnione, jeżeli $f(a, b, c) = 0$, $f(x, y, z)$ i jej pochodna cząstkowa $f'_z(x, y, z)$ są funkcjami ciągłemi zmiennych x, y, z w otoczeniu punktu a, b, c, i wreszcie jeżeli $f'_z(a, b, c) \neq 0$. Z tego ostatniego założenia i z ciągłości pochodnej wynika, że w otoczeniu punktu a, b, c przy stałych wartościach $x = x_0$ i $y - y_0$ tych dwóch zmiennych $f(x, y, z)$ jest funkcją rosnącą albo malejącą zmiennej z, co stanowi podstawę rozważań rozdziału l. 86. Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie $z = \varphi(x, y)$ wyznaczone jednoznacznie w pewnym obszarze γ, do którego należy punkt $x = a$, $y = b$ i w tym punkcie $z = c$.

Wynik ten możemy otrzymać, niezależnie od rozważań rozdziału l. 86, metodą przybliżeń kolejnych, wyłożoną co tylko w przypadku równania $f(x, y) = 0$. Zmiana liczby zmiennych żadnych istotnych zmian w rozumowaniu nie pociąga.

Przypuśćmy, że $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; równanie $f(x, y, z) = 0$ sprowadzamy do postaci $z = \Phi(x, y, z)$, gdzie

$\Phi(x,y,z)=z-mf(x,y,z)$, przyczem $m=\frac{1}{f'_z(0,0,0)}$. Tworzymy przybliżenia kolejne:

$$z_1=\Phi(x,y,0),\ z_2=\Phi(x,y,z_1),\ z_3=\Phi(x,y,z_2),\dots$$
$$\dots,z_p=\Phi(x,y,z_{p-1}),\dots$$

Udowodnimy następnie zbieżność szeregu

$$z_1+(z_2-z_1)+(z_3-z_2)+\dots+(z_p-z_{p-1})+\dots$$

dla wartości zmiennych x, y należących do pewnego otoczenia punktu $x=0$, $y=0$. Granica tego szeregu jest szukaną funkcją $z=\varphi(x,y)$. Szczegóły dowodu zostawiamy do rozwinięcia czytelnikowi. Powiemy parę słów o pochodnych cząstkowych tej funkcji $z=\varphi(x,y)$ względem x i względem y. Załóżmy ponadto, co było założone dotychczas, że $f(x,y,z)$ posiada pochodne cząstkowe $f'_x(x,y,z)$ i $f'_y(x,y,z)$ ciągłe. Wtedy, jak łatwo udowodnić, funkcja $z=\varphi(x,y)$ posiada wspomniane pochodne cząstkowe. Niech y ma wartość stałą, i obok trójki liczb x,y,z spełniających równanie $f(x,y,z)=0$ weźmiemy pod uwagę nową trójkę $x+\triangle x$, y, $z+\triangle z$, zakładając, że wszystkie te wartości zmiennych należą do obszaru, w którym została określona przez nas funkcja $z=\varphi(x,y)$ i gdzie spełnione są wszystkie warunki założenia,

$$f(x+\triangle x,y,z+\triangle z)-f(x,y,z)=\triangle x f'_x(x+\theta\triangle x,y,z+\triangle z)+$$
$$+\triangle z f'_z(x,y,z+\theta'\triangle z)=0;\ \text{skąd}$$

$$\frac{\triangle z}{\triangle x}=-\frac{f'_x(x+\theta\triangle x,y,z+\triangle z)}{f'_z(x,y,z+\theta'\triangle z)},$$

przyczem mianownik, na mocy założeń nie równa się zeru.

Gdy $x\to 0$, $\triangle z\to 0$ przechodząc do granicy, na mocy ciągłości funkcji $z=\varphi(x,y)$, otrzymamy

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_y(x,y,z)}{f'_z(x,y,z)}. \tag{110}$$

Tak samo możemy udowodnić wzór

$$(111)\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y(x,y,z)}{f'_z(x,y,z)}.$$

Jako dalsze zastosowanie tej samej metody, możemy wziąć układ

$$(112)\qquad f_1(x,y,u,v) = 0,\ f_2(x,y,u,v) = 0$$

w celu wyznaczenia u i v jako funkcyj uwikłanych zmiennych niezależnych x i y. Zakładamy, że funkcje f_1 i f_2 są funkcjami ciągłemi zmiennych x, y, u, v i że pochodne cząstkowe $\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial v}$ istnieją i są także funkcjami ciągłemi zmiennych $x, y, u v$, w otoczeniu punktu $x = a$, $y = b$, $u = u_0$, $v = v_0$. Zakładamy dalej, że $f_1(a, b, u_0, v_0) = 0$ i $f_3(a, b, u_0, v_0) = 0$; a, b, u_0, v_0 stałe.

Jeżeli oprócz tego wyznacznik

$$\triangle = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

nie równa zeru dla $x = a$, $y = b$, $u = u_0$, $v = v_0$, to istnieje jeden i tylko jeden układ rozwiązań

$$u = \varphi(x, y),\ v = \psi(x, y),$$

gdzie $\varphi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ są funkcjami ciągłemi zmiennych x i y, wyznaczonemi w otoczeniu punktu $x = a$, $y = b$ i takie, że $\varphi(a, b) = u_0$, $\psi(a, b) = v_0$, przyczem

$$f_1\{x, y, \varphi(x, y)\ \psi(x, y)\} = 0,$$
$$f_2\{x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)\} = 0,$$

dla wszystkich wartości x, y wzmiankowanego obszaru, stanowiącego otoczenie (w znaczeniu szerszem) punktu $x = a$, $y = b$.

Dla skrócenia wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$c_{11} = \frac{\partial f_1(a, b. u_0, v_0)}{\partial u},\quad c_{12} = \frac{\partial f_1(a, b, u_0, v_0)}{\partial v}$$

$$c_{21} = \frac{\partial f_2(a, b, u_0, v_0)}{\partial u}, \quad c_{22} = \frac{\partial f_2(a, b, u_0, v_0)}{\partial v}.$$

Na mocy założenia wyznacznik $c_{11}\, c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} \neq 0$. Przez podstawienie $a + x$, $b + y$, $u_0 + u$, $v_0 + v$ na miejsce dawnych zmiennych x, y, u, v przekształcimy nasze zadanie na analogiczne, z tą tylko różnicą, że wartości, tak zwane początkowe, $x = a$, $y = b$, $u = u_0$, $v = v_0$ są teraz wszystkie zerami.

Układ (112) zastąpmy układem równoważnym

$$u = Af_1(x, y, u, v) + Bf_2(x, y, u, v) + u,$$
$$v = Cf_1(x, y, u, v) + Df_2(x, y, u, v) + v,$$

gdzie A, B, C, D są to spółczynniki liczbowe, które określimy w ten sposób, by pochodne cząstkowe wyrażeń stojących po drugiej stronie powyższych równości względem u i v w punkcie $x = 0$, $y = 0$, $u = 0$, $v = 0$, miały wartość zero; przyczem dla równoważności musi być zastrzeżone, że wyznacznik $AD - CB \neq 0$. Oznaczmy dla skrócenia:

$$Af_1(x, y, u, v) + Bf_2(x, y, u, v) + u = F(x, y, u, v),$$
$$Cf_2(x, y, u, u) + Df_2(x, y, u, v) + v = \Phi(x, y; u, v);$$

łatwo sprawdzić, że $\Phi(0, 0, 0, 0) = 0$, $F(0, 0, 0, 0) = 0$.

Przejdźmy do pochodnych cząstkowych

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = C\frac{\partial f_1}{\partial u} + D\frac{\partial f_2}{\partial u}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = C\frac{\partial f_2}{\partial v} + D\frac{\partial f_2}{\partial v} + 1;$$
$$\frac{\partial F}{\partial u} = A\frac{\partial f_2}{\partial u} + B\frac{\partial f_2}{\partial u} + 1; \quad \frac{\partial F}{\partial v} = A\frac{\partial f_1}{\partial v} + B\frac{\partial f_2}{\partial v};$$

w punkcie $x = 0$, $y = 0$, $v = 0$ mamy $\frac{\partial f_1}{\partial u} = c_{11}$, $\frac{\partial f_1}{\partial u} = c_{12}$, $\frac{\partial f_2}{\partial u} = c_{21}$, $\frac{\partial f_2}{\partial v} = c_{22}$; a więc, by $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$ dla $x = 0$, $y = 0$, $u = 0$, $v = 0$, trzeba spółczynniki A, B, C, D tak wybrać, by, po pierwsze,

$$A c_{11} + B c_{21} = -1$$
$$A c_{12} + B c_{22} = 0,$$

co jest możliwe, bo według założenia $c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} \neq 0$; tak samo po drugie

$$C c_{11} + D c_{21} = 0,$$
$$C c_{12} + D c_{22} = -1;$$

te równania dają $A = -\frac{c_{22}}{\triangle}$, $B = \frac{c_{12}}{\triangle}$, $C = \frac{c_{21}}{\triangle}$, $D = -\frac{c_{11}}{\triangle}$, gdzie $\triangle \neq 0$, ponieważ $\triangle = c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}$. Dalej sprawdzamy, że $AD - BC = \frac{1}{\triangle} \neq 0$, co zabezpiecza równoważność układu (112) z układem

$$u = F(x, y, u, v),$$
$$v = \Phi(x, y, u, v).$$

Jeżeli znajdziemy rozwiązanie tego układu, i udowodnimy, jednoznaczność rozwiązania, cel nasz będzie osiągnięty.

Funkcje F, Φ, $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ przyjmują wartość zero dla $x = 0, y = 0, u = 0, v = 0$ i są funkcjami ciągłemi tych zmiennych w pewnym obszarze, stanowiącym otoczenie w znaczeniu szerszem punktu $x = 0$, $y = 0$, $u = 0$, $v = 0$, który to obszar wyznaczony przez nierówności,

$$|x| \leqslant h, \; |y| \leqslant k, \; |u| \leqslant l, \; |v| \leqslant l, \text{ nazwiemy } (D);$$

przypuszczamy pozatem, że liczby dodatnie h, k, l są wybrane dostatecznie małe, by w (D)

$$(113) \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial u}\right| < \lambda, \; \left|\frac{\partial F}{\partial v}\right| < \lambda, \; \left|\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right| < \lambda, \; \left|\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right| < \lambda,$$

gdzie λ liczba dodatnia $< \frac{1}{2}$.

Tworzymy teraz kolejne wartości przybliżone

$$u_1 = F(x, y, 0, 0), \; v_1 = \Phi(x, y, 0, 0);$$
$$u_2 = F(x, y, u_1, v_1), \; v_2 = \Phi(x, y, 0, 0);$$

. . . .

$$u_p = F(x, y, u_{p-1}, v_{p-1}); \quad v_p = \Phi(x, y, u_{p-1}, v_{p-1});$$

. . . .

Przyjmiemy, że w tych wzorach $|x| \leqslant \eta$, $|y| \leqslant \eta$, gdzie liczba η, najwyżej równa mniejszej z dwóch liczb h i k, jest tak dobrana, by dla $|x| \leqslant \eta$, $|y| \leqslant \eta$, czyli w obszarze (D'):

$$|F(x,y,0,0)| < (1-2\lambda)l; \quad |\Phi(x,y,0,0)| < (1-2\lambda)l;$$

to jest możliwe, ze względu na ciągłość tych funkcyj, przyjmujących wartość zero dla $x=0$, $y=0$. Wtedy $|u_1| < (1-\lambda)l < l$; tak samo $|v_1| < l$; sprawdzamy następnie, że $|u_2| < l$, $|v_2| < l$; i t. d. Mamy zawsze $|u_p| < l$, $|v_p| < l$, gdy punkt x, y pozostaje w (D'); dowód przez indukcję; przyjmujemy, że $|u_{p-1}| < l$, $|v_{p-1}| < l$; w takim razie, ponieważ

$$u_p = F(x,y,0,0) + \{F(x,y,u_{p-1},v_{p-1}) - F(x,y,0,0)\} =$$
$$= F(x,y,0,0) + F'_u(x,y,\theta . u_{p-1}, \theta . v_{p-1}) . u_{p-1} +$$
$$+ F'(x,y,\theta . u_{p-1}, \theta . v_{p-1}) . v_{p-1},$$

więc

$$|u_p| < |F(x,y,0,0)| + |F'_u| . |u_{p-1}| + |F'_v| . |v_{p-1}|$$
$$|u_p| < |(1-2\lambda)l + \lambda l + \lambda l, \text{ na mocy (113)},$$

czyli

$|u_p| < l$; tak samo udowodnimy, że

$|v_p| < l$.

Wszystkie wartości przybliżone $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_p, v_p, \ldots$ co do wartości bezwzględnej mniejsze są od l.

Udowodnimy teraz, że u_p i v_p, czyli sumy częściowe szeregów

$$(114) \quad \begin{array}{l} u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) + \ldots \text{ i} \\ v_1 + (v_2 - v_1 + v_3 - v_2) + \ldots + (v_n - v_{n-1}) + \ldots \end{array}$$

zmierzają do granicy dla $p \to \infty$.

W rzeczy samej

$$u_p - u_{p-1} = F(x,y,u_{p-2},v_{p-2}) = (u_{p-1} - u_{p-2}) .$$
$$F'_u(x,y,u'_p,v'_p) + (v_{p-1} - v_{p-2}) . F'_v(x,y,u'_p,v'_p),$$

gdzie u'_p i v'_p są wartościami pośredniemi. Przechodząc do wartości bezwzględnych i na zasadzie (113)

$$|u_p - u_{p-1}| < \lambda |u_{p-1} - v_{p-2}| + \lambda |v_{p-1} - v_{p-2}|;$$

tak samo otrzymamy

$$|v_p - v_{p-1}| < \lambda . |u_{p-1} - u_{p-2}| + \lambda . |v_{p-1} - v_{p-2}|.$$

Oznaczmy przez ω_n największą z dwóch liczb $|u_n - u_{n-1}|$ i $|v_n - v_{n-1}|$; wtedy poprzednie nierówności można zastąpić następującemi:

$$\omega_p < 2\lambda \omega_{p-1}; \quad |u_p - u_{p-1}| \leqslant \omega_p; \quad |v_p - v_{p-1}| \leqslant \omega_p.$$

Z $\omega_p < 2\lambda \omega_{p-1}$ wynika

$$\omega_p < (2\lambda)^{p-1} . \omega_1 \quad \text{i} \quad \lim_{p \to \infty} \omega_p = 0, \text{ gdyż}$$

$\lim (2\lambda)^{p-1} = 0$, ponieważ $2\lambda < 1$;

$$|u_p - u_{p-1}| < (2\lambda)^{p-1} \omega_1;$$
$$|v_p - v_{p-1}| < (2\lambda)^{p-1} \omega_1.$$

Utwórzmy szereg

$$(114') \quad \omega_1 + 2\lambda \omega_1 + (2\lambda)^2 \omega_1 + \ldots + (2\lambda)^{n-1} \omega_1 + \ldots$$

Szereg ten jest zbieżny, a więc i szeregi (114) są zbieżne, ponieważ $|u_p - u_{p-1}| < (2\lambda)^{p-1} . \omega_1$, $|v_p - v_{p-1}| < (2\lambda)^{p-1} . \omega_1$. Szeregi (114) są nawet jednostajnie zbieżne (l. 121), skąd wnioskujemy (l. 124), że sumy tych szeregów są funkcjami ciągłemi zmiennych x i y; oznaczymy odpowiednio przez $\varphi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ sumy tych szeregów; mamy wtedy

$$u = \lim_{p \to \infty} u_p = \varphi(x, y); \quad v = \lim_{p \to \infty} v_p = \psi(x, y);$$

ponieważ

$$u_p = F(x, y, u_{p-1}, v_{p-1}) \text{ i } \Phi(x, y, u_{p-1}, v_{p-1}),$$

przechodząc do granicy dla $p \to \infty$, otrzymamy

$$u = F(x, y, u, v), \quad v = \Phi(x, y, u, v),$$

czyli

$$\varphi(x, y) = F\{x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)\};$$
$$\psi(x, y) = \Phi(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)\};$$

gdy $x=0$, $y=0$, wszystkie funkcje $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_p, v_p, \ldots$ są równe zeru, a więc i ich granica również, t. j. dla $x=0$, $y=0$, $u=\varphi(0,0)=0$, $v=\psi(0,0)=0$.

Rozwiązanie jest jedyne. Gdyby bowiem było inne rozwiązanie, spełniające te same warunki i wyznaczone, gdy punkt x, y należy do (D'), dajmy na to $U=U(x,y)$, $V=V(x,y)$, to

$$U=F(,y,U,V),\ V=\Phi(x,y,U,V)$$

$$\text{i } U-u_p=F(x,y,U,V)-F(x,y,u_{p-1},v_{p-1});$$

przechodząc do wartości bezwzględnej i stosując wzór na wartość średnią, otrzymamy:

$$|U-u_p|<\lambda|U-u_{p-1}|+\lambda|V-v_{p-1}|;$$

tak samo

$$|V-v_p|<\lambda|U-u_{p-1}|+\lambda|V-v_{p-1}|;$$

dodając stronami:

$$|U-u_p|+|V-v_p|<2\lambda\{|U-u_{p-1}|+|V-v_{p-1}|\};$$

stąd

$$0<|U-u_p|+V-v_p|<(2\lambda)^{p-1}\{|U-u_1|+|V-v_1|\}.$$

Przechodząc do granicy, otrzymamy $p\to\infty$,

$$\lim_{p\to\infty}\{|U-u_p|+|V-v_p|\}=0, \text{ gdyż } \lim_{p\to\infty}(2\lambda)^{p-1}=0;$$

a więc

$$\lim|U-u_p|=0,\ \lim|V-v_p|=0,$$

czyli

$$U=\lim u_p=\varphi(x,y);\ V=\lim v_p=\psi(x,y),$$

wbrew założeniu, że U i V stanowią rozwiązania odmienne. Jednoznaczność rozwiązań jest więc udowodniona.

Możemy teraz przejść do większej liczby zmiennych. Istota dowodu pozostaje bez zmiany. Kierując się analogją z udowodnionem poprzednio twierdzeniem czytelnik udowodni z łatwością twierdzenie ogólne następujące.

Dany jest układ:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k, u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_k, u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_p(x_1, x_2, \ldots, x_k, u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0$$

Jeżeli te funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_p$ *są funkcjami ciągłemi zmiennych* $x_1, x_2, x_k, \ldots, n_1, u_2, \ldots u_p$, *w pewnym obszarze* (D), *stanowiącym w szerszem znaczeniu tego słowa otoczenie punktu* $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots$, $x_k = a_k$, $u_4 = b_1$, $u_2 = b_2, \ldots$, $u_p = b_p$; *jeżeli istnieją pochodne cząstkowe tych funkcyj względem zmiennych* $u_1, u_2, \ldots, u_p$, *jeżeli te pochodne cząstkowe* $\frac{\partial f_i}{\partial u_l}$, $(i = 1, 2, \ldots, p;\ l = 1, 2, \ldots, p)$, *są funkcjami ciągłemi względem wszystkich zmiennych w obszarze* (D), *jeżeli*

$$f_1(a_1, a_2, \ldots, a_k;\ b_1, b_2, \ldots, b_p) = 0,$$
$$f_2(a_1, a_2, \ldots, a_k;\ b_1, b_2, \ldots, b_p) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_p(a_1, a_2, \ldots, a_k;\ b_1, b_2, \ldots, b_p) = 0,$$

i wreszcie jeżeli wyróżnik

$$\triangle = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial u_1} & \frac{\partial f_p}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial u_p} \end{vmatrix}$$

nie równa się zeru dla

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, \ldots,\ x_k = a_k;\ u_1 = b_1,\ u_2, = b_2, \ldots,\ u_p = b_p,$$

to istnieje jeden i jeden tylko układ rozwiązań

$$u_1 = \varphi_1(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k),$$
$$u_2 = \varphi_2(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_p = \varphi_p, (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k),$$

które są funkcjami ciągłemi zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_k$, *w pewnym obszarze* (D), *stanowiącym otoczenie w szerszem znaczeniu punktu* $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_k = a_k$, *które dla* $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_k = a_k$ *przyjmują wartości odpowiednio* $b_1, b_2, \ldots$, *tak że*

$$\varphi_1(a_1, a_2, \ldots, a_k) = b_1;\ \varphi_2(a_1, a_2, \ldots, a_k) = b_2, \ldots \text{ i t. d.}$$

Funkcje te w (D') *spełniają równania:*

$$f_1\{x_1, x_2, \ldots x_k;\ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k), \varphi_2(x, x_2 \ldots, x_k), \ldots,$$
$$\ldots, \varphi_p(x_1, \ldots x_k)\} = 0,$$
$$f_2\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k;\ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots$$
$$\ldots, \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_k)\} = 0,$$

. . . .

$$f_p\{x_1, x_2, \ldots, x_k;\ \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots$$
$$\ldots, \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_k)\} = 0)$$

Wyznacznik $\triangle$ nazywa się *wyznacznikiem funkcyjnym* alb *jakobianem* funkcji $f_1 f_2, \ldots, f_p$ względem zmiennych $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Wyznacznik ten odgrywa ważną rolę w matematyce i spotkamy się z nim jeszcze nieraz; uważać go można za naturalne uogólnienie pojęcia pochodnej dla funkcyj wielu zmiennych. Dla skrócenia oznaczamy czasami wyznacznik funkcyjny $\triangle$ zapomocą symbolu

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_t)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_p)}.$$

116. *Uogólnienie pojęcia pochodnej funkcji jednej zmiennej.*

Pochodną $f'(x)$ funkcji $f(x)$ określiliśmy jako granicę ilorazu różnicowego

$$F(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

przy stałej wartości zmiennej x, gdy $h \to 0$. Ta granica, a więc pochodna, nie zawsze istnieje, nawet dla funkcyj ciągłych.

Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ jest wyznaczona w przedziale (m, n) i niech x oznacza punkt tego przedziału; będziemy rozpatrywali tylko takie wartości x i h, by nie tylko x, ale i $x+h$ należało

do (m, n). Gdy ustalimy x, $F(x, h)$ będzie funkcją zmiennej h. Przypuśćmy, że można znaleźć taką liczbę $\alpha > 0$, że dla $0 < b < \alpha$, $(x \neq n)$, $F(x, h)$ jest funkcją zmiennej h ograniczoną od góry. Wiemy, że w tych warunkach istnieje prawostronna największa z granic K_{0+0} funkcji $F(x, h)$ zmiennej h w punkcie $h = 0$, patrz (l. 69).

Jeżeli można znaleźć taką liczbę $\alpha > 0$, że dla $0 < h < \alpha$, $(x \neq n)$, $F(x, h)$ jest funkcją ograniczoną od dołu zmiennej h, to istnieje prawostronna najmniejsza z granic funkcji $F(x, h)$ w punkcie $h = 0$, którą oznaczaliśmy (l. 69) przez k_{0+0}.

Przypuśćmy teraz, że istnieje taka liczba $\alpha > 0$, że dla $\alpha < h < 0$, $(x \neq m)$, $F(x, h)$ jest funkcją ograniczoną od góry zmiennej h. Wtedy istnieje lewostronna największa z granic funkcji $F(x, h)$ w punkcie $h = 0$, czyli K_{0-0}

Jeżeli istnieje taką liczba $\alpha > 0$, że dla $-\alpha < h < 0$, $(x \neq m)$, $F(x, h)$ jest funkcją ograniczoną od dołu zmiennej h, to istnieje lewostronna najmniejsza z granic funkcji $F(x, h)$ w punkcie $h = 0$, t. j. k_{0-0}.

Jeżeli wszystkie te cztery liczby są równe, to istnieje granica $\lim\limits_{h \to 0} F(x, h)$ czyli pochodna funkcji $f(x)$ w punkcie x.

Jeżeli dwie lewostronne granice: największa z granic i najmniejsza z granic funkcji $F(x, h)$ zmiennej h są sobie równe, to istnieje granica lewostronna ilorazu różnicowego $F(x, h)$, t. j. pochodna lewostronna; jeżeli są równe prawostronne największa i najmniejsza z granic, to istnieje granica prawostronna wyrażenia $F(x, h)$, czyli pochodna prawostronna funkcji $f(x)$.

Jeżeli funkcja $F(x, h)$ nie jest ograniczona od góry w otoczeniu prawostronnem punktu $h = 0$, to i wtedy może być mowa o symbolu K_{0+0}, któremu przypisujemy wartość $+\infty$, tak, że orzeczenie $K_{0+0} = +\infty$ oznacza, że $F(x, h)$ jako funkcja zmiennej h nie jest ograniczona od góry w prawostronnem otoczeniu punktu $h = 0$. Tak samo $k_{0-0} = -\infty$ oznacza, że $F(x, h)$ nie jest ograniczone od dołu w prawostronnem otoczeniu punktu $h = 0$, $K_{0-0} = +\infty$ oznacza, że $F(x, h)$ nie jest ograniczone od góry w lewostronnem otoczeniu punktu $h = 0$, a $k_{0-0} = -\infty$ oznacza, że $F(x\ h)$ nie jest ograniczone od dołu w lewostronnem otoczeniu punktu $h = 0$.

Przy takiem rozszerzeniu tych pojęć, każdej funkcji $f(x)$, wyznaczonej w (m, n), w każdym punkcie wewnętrznym z przedziału (m, n), będą odpowiadały, jak wiemy, symbole $K_{0+0}, k_{0+0} \cdot K_{0-0}, k_{0-0}$, które będą bądź $+\infty$, bądź $-\infty$, bądź będą miały pewne wartości liczbowe. Dla krótkości symbole te będziemy nazywali liczbami, cho-

ciaż w przypadku, gdy oznaczają $\pm\infty$, liczbami nie są. Badanie tych liczb może zastąpić dla funkcyj, nie mających pochodnych badanie pochodnej. Jeżeli x jest jednym z punktów m lub n, to w takim punkcie będziemy mieli bądź tylko K_{0+0}, k_{0+0} w pierwszym przypadku, bądź tylko K_{0-0}, k_{0-0} w drugim.

Liczby w ten sposób określone będziemy nazywać liczbami pochodnemi górnemi albo dolnemi, (największemi lub najmniejszemi) prawo lub lewostronnemi i oznaczać będziemy symbolami $D^{+}_{+} f(x)$, $D^{-}_{+} f(x)$, $D^{+}_{-} f(x)$, $D^{-}_{-} f(x)$, przyczem górny znak $+$ odnosi się do największej, a górny znak $-$ do najmniejszej z granic, gdy tymczasem $+$ albo $-$ u dołu oznacza prawą lub lewą stronę.

Jeżeli $D^{+}_{+} f(x) = D^{-}_{+} f(x) = D^{+}_{-} f(x) = D^{-}_{-} f(x)$ i jeżeli te symbole są liczbami, to wspólna ich wartość równa się pochodnej $f'(x)$, która wtedy istnieje. Jeżeli wspólna wartość tych symboli jest bądź $+\infty$, bądź $-\infty$, to pochodnej w punkcie x we właściwem znaczeniu niema, ale istnieje styczna do obrazu geometrycznego funkcji, styczna w punkcie x, równoległa do osi Oy.

Z określenia tych liczb pochodnych górnej i dolnej prawo lub lewostronnej (I. 69) wynika, że posiadają one własności następujące:

1) Do każdej dowolnie małej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać taką liczbę $\eta > 0$, że nierówność $0 < h < \eta$ pociąga

$$D^{-}_{+} f(x) - \varepsilon < \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < D^{+}_{+} f(x) + \varepsilon,$$

dla wszystkich wartości h, spełniających warunek $0 < h\eta$, o ile $D^{-}_{+} f(x)$ i $D^{+}_{+} f(x)$ mają wartości liczbowe (t. j. skończone).

2) Do każdej dowolnie małej liczby $\varepsilon > 0$ i do każdej dowolnie małej liczby $\eta > 0$ można zawsze dobrać takie wartości dodatnie h_1 zmiennej h, mniejsze od η, że

$$\frac{f(x+h_1) - f(x)}{h_1} > D^{+}_{+} f(x) - \varepsilon;$$

można również dobrać takie wartości dodatnie h_2 zmiennej h, mniejsze od η, że

$$\frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_1} < D^{-}_{+} f(x) + \varepsilon.$$

Pochodne górna i dolna lewostronne spełniają podobne warunki; należy w wysłowieniu poprzednich warunków nierówność $0 < h < \eta$

zastąpić w 1) nierównością $-\eta < h_2 < \eta$. w 2) zastąpić odpowiednio przez $-\eta < h_2 < 0$. Przy takiem znaczeniu zmiennej h, będziemy mieli

$$\overline{D}_- f(x) - \varepsilon < \frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1} < \overset{+}{D}_- f(x) + \varepsilon,$$

dla pierwszej własności, a nierówności

$$\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2} > \overset{+}{D}_- f(x) - \varepsilon \text{ i}$$

$$\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2} < \overline{D}_- f(x) + \varepsilon,$$

dla drugiej własności.

Jeżeli teraz $\overset{+}{D}_+ f(x) = +\infty$, to oznaczać to będzie poprostu, iż istnieją takie wartości $0 < h_1 < \eta$, gdzie $\eta > 0$ jest liczbą dowolnie małą, że

$$\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1} > M,$$

gdzie M jest liczbą dowolnie wielką.

Interpretacja geometryczna liczb pochodnych górnych i dolnych jest nadzwyczaj prosta. Niech punkt M obrazu geometrycznego funkcji $y = f(x)$, odpowiada wartości x zmiennej niezależnej; weźmiemy pod uwagę tylko te punkty naszego obrazu geometrycznego, które należą do pasma odpowiadającego przedziałowi $(x, x+\eta)$, tak, że to pasmo jest utworzone przez dwie proste równoległe do osi Oy, z których jedna, stała, przechodzi przez punkt M (o odciętej x), a druga prosta, zmienna wraz ze zmianą η, jest miejscem geometrycznem wszystkich punktów płaszczyzny o odciętej $x+h$. Te punkty wykresu funkcji $y = f(x)$, które należą do wzmiankowanego pasma możemy nazwać „łukiem“ krzywej, należącym do pasma, albo wyciętym przez pasmo. Połączmy punkt stały M z wszystkiemi punktami wzmiankowanego łuku. Utworzy się zbiór (P_η) promieni albo pół-prostych; współczynniki kierunkowe tych prostych są wyrażone przez ilorazy różnicowe

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

gdzie h przyjmuje wszystkie wartości spełniające warunek $0 < h < \eta$.

Półproste zbioru P_η zawarte są wewnątrz pewnego kąta XMY, który jest najmniejszym z kątów, posiadających tę własność. Jeżeli teraz pasmo zwęzimy, t. j. zastąpimy liczbę η liczbą mniejszą η_1, to zbiór półprostych P_{η_1} będzie częścią zbioru półprostych P_η, a więc

najmniejszy kąt, który zawiera wszystkie promienie pęku P_{η_1}, kąt X_1MY_4, będzie mniejszy od kąta XMY albo najwyżej równy temu kątowi. Tak więc, gdy $\eta \to 0$, to ramię kąta MY obraca się naokoło punktu M w kierunku malejących spółczynników kątowych, o ile nie pozostaje bez zmiany, a ramie MX kąta XMY obraca się naokoło punktu M w kierunku rosnących spółczynników kątowych,* o ile nie pozostaje bez zmiany, przyczem spółczynnik kierunkowy ramienia MY jest zawsze większy od spółczynnika kierunkowego ramienia MX (te spółczynniki kierunkowe są równe tylko w przypadku trywialnym, gdy w otoczeniu punktu M obrazem geometrycznym naszej funkcji $f(x)$ jest linja prosta, który to przypadek odrzucamy).

Półproste MY i MX, ramiona kąta XMY, obracając się, mogą, dla $\eta \to 0$, mieć wspólną granicę MT, która jest styczną w punkcie M do krzywej (l. 88). W przeciwnym razie półproste MY i MX dla $\eta \to 0$ dążą do dwóch różnych położeń granicznych, MY do prostej granicznej MT_1, a MX do prostej granicznej MT_2, przyczem, naturalnie, spółczynnik kierunkowy półprostej granicznej MT_2 jest większy od spółczynnika kierunkowego półprostej MT_2. Te spółczynniki kierunkowe półprostych granicznych MT_1 i MT_2 są to właśnie liczby pochodne prawostronne górna i dolna.

Zostawiamy czytelnikowi interpretację liczb pochodnych lewostronnych górnej i dolnej.

Weźmy naprz. funkcję $y = x \sin \frac{1}{x}$, która nie posiada pochodnej w punkcie $x = 0$, choć jest ciągłą w tym punkcie.** Punkt M jest tu punktem początkowym. Gdy $x = \frac{2}{\pi(4k+1)}$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ rzędna y krzywej równa się odciętej; jasna rzecz, że rzędna y nigdy nie może być większa od odciętej. Gdy $x = \frac{2}{\pi(4k+3)}$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, rzędna y krzywej równa się $-x$.

Stąd wynika, że kąt YMX, o którym była mowa poprzednio jest tutaj kątem, niezależnym od wartości liczby η; jest to kąt prosty, utworzony przez dwusieczną MY, której równanie jest $y = x$ i przez dwusieczną MX, której równanie jest $y = -x$. Jakkolwiek małą

---

* Czytelnik zechce wykreślić sobie odpowiedni rysunek.

** W punkcie $x = 0$, $y = 0$; tak, oczywiście, dopełniamy określenie wyrażenia $y = x \sin \frac{1}{x}$, które traci sens dla $x = 0$.

liczbą jest η, proste (P_η) wypełniają całkowicie tylko co wspomniany kąt XMY, przyczem nieskończenie wiele półprostych (siecznych) zbioru (P_η) zlewa się z ramionami MY i MX tego kąta. Spółczynniki kierunkowe tych półprostych są równe odpowiednio $+1$ i -1. Tak więc w tym przykładzie

$$D^{+}_{+}\left(x \sin \frac{1}{x}\right)_{o} = +1, \quad D^{-}_{+}\left(x \sin \frac{1}{x}\right)_{o} = +1;$$

tak samo

$$D^{+}_{-}\left(x \sin \frac{1}{x}\right)_{o} = +1, \quad D^{-}_{-}\left(x \sin \frac{1}{x}\right)_{o} = +1.$$

Jeżeli zamiast funkcji poprzedniej zbadamy przykład

$$x = (e^{x} - 1) \sin \frac{1}{x}, \text{ dla } x \neq 0 \text{ i } y = 0, \text{ dla } x = 0,$$

to kąt YMX zmienia się wraz ze zmianą liczby η; MY zmierza do położenia granicznego MT_1, a MX do położenia granicznego MT_2, przyczem równania prostych MT_1 i MT_2 są, jak w poprzednim przykładzie, odpowiednio $y = x$ i $y = -x$. Wartości liczb pochodnych są zatem, jak poprzednio $+1$ i -1.

Dla funkcji $y = x \sin^2 \frac{1}{x}$ temi wartościami są $+1$ i 0.

Jasna rzecz, że jeżeli jedna z pochodnych uogólnionych D^{+}_{+}, D^{+}_{-}, D^{-}_{+}, D^{-}_{-}, jest równa $+\infty$ albo $-\infty$, to w interpretacji geometrycznej odpowiednie ramię MY albo MX dąży do położenia granicznego MT_1 lub MT_2, równoległego do osi Oy.

Zastosowanie pochodnych uogólnionych do badania przebiegu zmienności funkcji jest w wielu razach widoczne bezpośrednio z interpretacji geometrycznej, której zresztą bardzo łatwo jest już nadać szatę analityczną. Tak np., twierdzenie 1[a] rozdziału l. 100 przybiera tu postać następującą.

Jeżeli liczby pochodne funkcji $f(x)$ są wszystkie cztery dodatnie w punkcie x, (wystarczy wiedzieć, że D^{-}_{+} i D^{-}_{-} są dodatnie, bo $D^{+}_{+} \geqslant D^{-}_{+}$ i $D^{+}_{-} \geqslant D^{-}_{-}$), to istnieje takie otoczenie punktu x, że $x' < x$ pociąga $f(x') < f(x)$, a $x < x''$ pociąga $f(x) < f(x'')$. o ile x' i x'' należą do wzmiankowanego otoczenia punktu x. Twierdzenie 1[e] tegoż rozdziału l. 100 przyjmuje postać: jeżeli liczby pochodne prawostronne górna i dolna są dodatnie $\left(D^{-}_{+} > 0 \text{ pociąga } D^{+}_{+} > 0, \text{ gdyż } D^{+}_{+} \geqslant D^{+}_{+}\right)$,

to istnieje prawostronne otoczenie punktu x, takie, że $x < x'$ pociąga $f(x) < f(x')$, o ile x' do tego prawostronnego otoczenia należy.

Przechodząc do badania extremum funkcji przy pomocy liczb pochodnych uogólnionych, zauważymy, iż zachodzi następujące, łatwe do udowodnienia twierdzenie; jeżeli pochodne lewostronne $D^{+}_{-} f(x)$ i $D^{-}_{-} f(x)$ są ujemne w punkcie x, a pochodne prawostronne $D^{+}_{+} f(x)$ i $D^{-}_{+} f(x)$ są dodatnie w tymże punkcie x, to funkcja $y = f(x)$ posiada minimum w punkcie x; jeżeli $D^{+}_{-} f(x)$ i $D^{-}_{-} f(x)$ są dodatnie, a $D^{+}_{+} f(x)$ i $D^{-}_{+} f(x)$ są ujemne w punkcie x, to funkcja $y = f(x)$ posiada maximum w punkcie x.

Bardzo ważną w zastosowaniach do teorji równań różniczkowych jest klasa funkcyj ciągłych, których wszystkie cztery liczby pochodne uogólnione są ograniczone w przedziale (m, n). Jest to klasa funkcyj, spełniających tak zwany warunek Lipschitza; warunek ten ma postać

$$|f(x') - f(x'')| < k \cdot |x' - x''|,$$

gdzie x' i x'' należą do przedziału (m, n), a k jest liczbą stałą.

Szeregi, których wyrazy są funkcjami zmiennej niezależnej.

117. *Zbieżność jednostajna.*

Przypuśćmy, że dany jest szereg

$$(115) \qquad u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

którego wyrazy są funkcjami zmiennej x. Dajmy zmiennej x wartość a; otrzymamy wtedy szereg liczbowy

$$(116) \qquad u_1(a) + u_2(a) + u_3(a) + \ldots + u_n(a) + \ldots;$$

szereg ten może być zbieżny, albo rozbieżny. Jeżeli jest zbieżny, oznaczmy przez $s(a)$ jego sumę. Powiemy wtedy, że szereg (115) określa nam pewną funkcję $s(x)$, która dla $x = a$ przyjmuje wartość $s(a)$, która jest sumą, szeregu (116). W ten sposób otrzymamy funkcję $s(x)$, wyznaczoną dla tych wszystkich wartości zmiennej x, dla których odpowiedni szereg jest zbieżny.

Zajmować się będziemy szeregami, które są zbieżne

dla wszystkich wartości zmiennej x, należących do pewnego przedziału (m, n); wtedy suma, czyli funkcja $s(x)$ jest wyznaczona w przedziale (m, n).

Sumę $s(x)$ możemy przedstawić w postaci

$$s(x) = s_p(x) + R_p(x),$$

gdzie $s_p(x)$ oznacza sumę częściową p pierwszych wyrazów szeregu (115), a $R_p(x)$ sumę pozostałych wyrazów (tak zwana *reszta*).

Niech a oznacza jakąkolwiek liczbę przedziału (m, n). Ponieważ szereg (115) jest zbieżny dla $x = a$, to do każdej liczby $\varepsilon > 0$ dobrać można taki wskaźnik p_0, że

$$|R_p(a)| < \varepsilon$$

gdy tylko $p > p_0$. Liczba p_0 zależy od ε i od a.

Określenie. Szereg jest jednostajnie zbieżny w przedziale (m, n), jeżeli do każdej dowolnie małej liczby $\varepsilon > 0$, można dobrać wskaźnik p_0, niezależnie od x, taki, że

$$|R_p(x)| < \varepsilon,$$

dla każdej wartości zmiennej x w przedziale (m, n) i dla każdej wartości p większej od p_0.

Określenie to wymaga pewnego wyjaśnienia. Ze zbieżności szeregu (115) w (m, n), wynika, iż dla każdej wartości x w (m, n) istnieje liczba $p_0(x, \varepsilon)$, taka, że

$$|R_p(x)| < \varepsilon$$

skoro tylko $p > p_0(x, \varepsilon)$. Możemy, np., sobie wyobrazić, że jako p_0 bierzemy najmniejszą liczbę całkowitą, spełniającą powyższe warunki; p_0 jest więc dla każdej wartości x w (m, n) i dla każdej wartości $\varepsilon > 0$ funkcją zupełnie wyznaczoną tych zmiennych. Przypuśćmy, że przy każdej wartości ε, $p_0(x, \varepsilon)$ jako funkcja zmiennej x jest funkcją ograniczoną od góry w przedziale (m, n); (ε jest stałą). Funkcja $p_0(x, \varepsilon)$ jako ograniczona, posiada kres górny, który też osiąga; niech $\upsilon_0(\varepsilon)$ oznacza ten kres górny; $p_0(x, \varepsilon) \leqslant \upsilon_0(\varepsilon)$

dla każdej wartości x w (m, n); jeżeli więc $p > \upsilon_0(\varepsilon)$ to $p > p_0(x, \varepsilon)$, dla każdego x w (m, n), a więc $p > \upsilon_0(\varepsilon)$ pociąga

$$|R_p(x)| < \varepsilon,$$

dla każdego x w (m, n) i szereg jest jednostajnie zbieżny. Lecz może się również zdarzyć, że dla dostatecznie małych wartości ε (a więc i dla wszystkich mniejszych), funkcja $p_0(x, \varepsilon)$, choć wyznaczona dla każdej wartości x w (m, n), nie jest przecie ograniczona od góry w tym przedziale. Wtedy nie jest możliwe znalezienie takiej liczby υ_0, by

$$|R_p(x)| < \varepsilon$$

skoro tylko $p > \upsilon_0$, i dla każdego x w (m, n).

Jest wtedy, (t. j. gdy zbieżność nie jest jednostajna w (m, n), rzeczą możliwą znaleźć w (m, n) taki ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p, \ldots$ wartości zmiennej, że warunek $\lim_{p \to \infty} R_p(x_p) = 0$ nie jest spełniony. W rzeczy samej, $p_0(x, \varepsilon)$ nie jest funkcją ograniczoną zmiennej x w (m, n); o ile ε jest liczbą dostatecznie małą. Stąd wynika, że istnieją wartości zmiennej x, którym odpowiadają wartości $p_0(x, \varepsilon)$ tak wielkie jak się podoba. Niech $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_l, \ldots$ $(l = 1, 2, 3 \ldots)$ oznacza ciąg rosnący liczb dążących do nieskończoności; niech $x_1, x_2, x_3, x_l, \ldots$ oznacza odpowiadający ciąg wartości zmiennej x w (m, n), taki że

$$p_0(x_1, \varepsilon) > M_1,\ p_0(x_2, \varepsilon) > M_2; \ldots, p_0(x_l, \varepsilon) > M_l, \ldots$$

Oznaczmy dla skrócenia

$$p_1 = p_0(x_1, \varepsilon),\ p_2 = p_0(x_2, \varepsilon), \ldots, p_l = p_0(x_l, \varepsilon), \ldots$$

Ponieważ $p_0(x_l, \varepsilon)$ jest najmniejszą liczbą całkowitą, posiadającą tę własność, że $p > p_0(x_l, \varepsilon) = p_l$ pociąga

$$|R_p(x_l)| < \varepsilon,$$

więc

$$|R_{p_l}(x_l)| \geqslant \varepsilon.$$

Szereg (115) jest jednostajnie zbieżny w (m, n), jeżeli ciąg

$$R_1(x_1),\ R_2(x_2), \ldots, R_l(x_l), \ldots$$

zmierza do zera, jakkolwiek obierzemy ciąg

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots x_l,$$

wartości zmiennej x w (m, n). Jest to warunek konieczny i dostateczny jednostajnej zbieżności w (m, n).

W rzeczy samej, jeżeli szereg (115) jest jednostajnie zbieżny, to z podanego określenia ciągu jednostajnie zbieżnego odrazu wynika, że $\lim\limits_{l\to\infty} R_l(x_l) = 0$. Warunek ten jest więc konieczny. Jest on także dostateczny, bo jak widzieliśmy przed chwilą, gdyby szereg (115) nie był jednostajnie zbieżny to istniałoby $\varepsilon > 0$ i ciąg

(117) $$R_{p_1}(x_1),\ R_{p_2}(x_2),\ R_{p_3}(x_3), \ldots,\ R_{p_l}(x_l), \ldots,$$

taki, że dlań nie może być $\lim R_{p_l}(x_l) = 0$, gdyż

$$|R_{p_l}(x_l)| \geqslant \varepsilon$$

dla wszystkich wyrazów tego ciągu.

Utwórzmy teraz ciąg

(118) $$R_1(\xi_1),\ R_2(\xi_2), \ldots,\ R_n(\xi_n), \ldots$$

tak, by wszystkie wyrazy ciągu (117) były wyrazami ciągu (118); wtedy ciąg (117), o ile nie będzie identyczny z ciągiem (118), będzie ciągiem, utworzonym z wybranych wyrazów ciągu (118); ponieważ ciąg (117) nie dąży do granicy zero, więc i ciąg (118) nie może zmierzać do tej granicy.

Przykłady:

1) Szereg

$$(x - xe^{-x^2}) + (xe^{-x^2} - 2xe^{-2x^2}) + \ldots + (xe^{-(n-1)x^2} - xe^{-nx^2}) + \ldots$$

jest szeregiem zbieżnym dla każdej wartości x, gdyż suma częściowa $s_n(x) = x - nxe^{-nx^2}$ i dla $x \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = x - \lim\limits_{n\to\infty} ne^{-nx^2} = x$, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty} ne^{-nx^2} = 0$ dla każdej wartości $x \neq 0$; gdy zaś $x = 0$, to $s_n(x) = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(0) = 0$. Tak więc szereg jest zbieżny dla każdej wartości x i $s(x) = x$. Zbieżność jednak nie jest jednostajna w każdym przedziale, zawierającym punkt 0. W rzeczy samej, $R_n(x) = s(x) - s_n(x) = x - (x - nxe^{-nx^2}) = nxe^{-nx^2}$; niech $x_n = \frac{1}{n}$, $R_n(x_n) = R_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-\frac{1}{n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} R_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$. Granica istnieje, ale nie równa się 0.

2) Szereg

$$\frac{x}{1+x}+\frac{x}{(1+x)(1+2x)}+\frac{x}{(1+x)(1+2x)(1+3x)}+\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{x}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)}+\ldots$$

Szereg ten jest zbieżny dla $x \geqslant 0$. Suma częściowa $s_n(x) =$ $= 1 - \frac{1}{1+nx}$ i $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = 1$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 1$, dla $x > 0$, gdyż $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$; gdy $x = 0$, $s_n(x) = 0$ i $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0$; tak więc $s(x) = 1$ dla $x > 0$ i $s(0) = 0$. Szereg nasz jest więc zbieżny, ale nie jest jednostajnie zbieżny, gdyż $R_n(x) =$ $= \frac{1}{1+nx}$ dla $x > 0$ i $R_n(0) = 0$; niech $x_n = \frac{1}{n}$, $R_n(x_n) =$ $= R_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$; zbieżność nie jest więc jednostajna w żadnym przedziale $(0, a)$.

Możemy udowodnić, że szereg nasz nie jest jednostajnie zbieżny na podstawie bezpośredniego określenia jednostajnej zbieżności; chodzi o to, czy można znaleźć do każdego $\varepsilon > 0$ taką liczbę p_0, by $p > p_0$ pociągało

$$|R_p(x)| < \varepsilon,$$

dla każdego x w $(0, a)$. $R_p(x) = \frac{1}{1+px}$ dla $x > 0$; aby było $\frac{1}{1+px} < \varepsilon$, musi być $p > \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$; $(\varepsilon < 1,\ x > 0)$, funkcja $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ zmiennej x nie jest ograniczona w przedziale $(0, a)$; nie można więc znaleźć liczby υ jednej i tej samej dla każdego x w $(0, a)$ takiej, by $p > \upsilon$ pociągało $\frac{1}{1+px} < \varepsilon$, dla każdego x w $(0, a)$.

Jeżeli zaś zamiast przedziału $(0, a)$ weźmiemy przedział

(m,n), w którym $m>0$, $n>m$, to w (m,n) nasz szereg będzie jednostajnie zbieżny, bo

$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) \leqslant \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$ w (m,n); wystarczy więc obrać

$p>\frac{1}{m}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$, by $R_p(x)=\frac{1}{1+px}$ było mniejsze od ε dla każdego x w (m,n).

W praktyce bardzo często dowodzimy jednostajnej zbieżności szeregu przy pomocy następującego twierdzenia, którego dowód jest nadzwyczaj prosty.

Twierdzenie A. Jeżeli szereg, utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu

$$(119) \qquad u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_p(x)+\ldots$$

t. j. szereg

$$(119') \qquad |u_1(x)|+|u_2(x)|+\ldots+|u_p(x)|+\ldots$$

jest w (m,n) jednostajnie zbieżny i jeżeli ciąg funkcji

$$v_1(x),\ v_2(x),\ v_3(x),\ldots,\ v_p(x),\ldots$$

jest w przedziale ograniczony, t. j. jeżeli istnieje taka liczba M, że

$$|v_p(x)|<M$$

dla każdego wskaźnika p i dla każdej wartości zmiennej x w (m,n), to szereg

$$(120) \qquad u_1(x).v_1(x)+u_2(x).v_2(x)+u_3(x).v_3(x)+\ldots$$
$$\ldots+u_p(x).v_p(x)+\ldots$$

jest także jednostajnie zbieżny.

Przedewszystkiem odrazu widzimy, że szereg (120) jest zbieżny. Niech $r_p(x)$ oznacza resztę szeregu (119′), a $R_p(x)$ resztę szeregu (120). Jasna rzecz, że

$$(121) \qquad |R_p(x)|<M.r_p(x);$$

ponieważ szereg (119′) jest jednostajnie zbieżny w (m,n), więc można znaleźć taki wskaźnik p_0, że $p>p_0$ pociąga

$$|r_p(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

dla każdego x w (m, n). A więc, na mocy (121) mamy dla $p > p_0$

$$|R_p(x)| < \varepsilon,$$

niezależnie od wartości x w przedziale (m, n), co trzeba było udowodnić.

Uwaga. W przypadku szczególnym wyrazy szeregu (115) mogą być liczbami stałemi, tworzącemi szereg bezwzględnie zbieżny. Przy zachowaniu warunku, tyczącego się funkcji $v_p(x)$, szereg (120) jest jednostajnie zbieżny.

Tak naprzykład, jeżeli szereg liczbowy

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p + \ldots$$

jest bezwzględnie zbieżny, to szereg

$$a_1 \sin \mu_1 x + a_2 \sin \mu_2 x + a_3 \sin \mu_3 x + \ldots + a_p \sin \mu_p x + \ldots$$

jest jednostajnie zbieżny, jakiekolwiek wartości nadamy wyrazom ciągu

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_p, \ldots,$$

ponieważ

$$|\sin \mu_p x| \leq 1.$$

118. *Ciągłość funkcji określonej jako suma szeregu jednostajnie zbieżnego.*

Przypuśćmy, że szereg (115) jest jednestajnie zbieżny w (m, n) i wyznacza w tym przedziale funkcję $s(x)$.

Jeżeli każdy z wyrazów szeregu (115) jest funkcją ciągłą zmiennej x w punkcie x, to i funkcja $s(x)$ jest ciągła w punkcie x. Będziemy narazie mówili o ciągłości obustronnej, przyjmujemy więc, że punkt x jest punktem wewnętrznym przedziału (m, n).

Z powodu jednostajnej zbieżności szeregu (115) w (m, n) można do każdej liczby $\frac{\varepsilon}{3}$ dobrać taki wskaźnik p_0, że $p > p_0$ pociąga

$$|R_p(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dla każdego x w (m, n). Ustaliwszy w ten sposób p, napiszemy

$$s(x+h) = S_p(x+h) + R_p(x+h)$$
$$s(x) = S_p(x) + R_p(x),$$

przyczem $|h|$ dostatecznie małe, by $x+h$ było także w (m, n). Stąd

(122) $$s(x+h) - s(x) = \{S_p(x+h) - S_p(x)\} + \\ + R_p(x+h) - R_p(x).$$

$s_p(x)$ jako suma p funkcyj ciągłych $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ $\ldots + u_p$ jest funkcją ciągłą zmiennej x w (m, n). Wobec tego do liczby $\frac{1}{3}\varepsilon$ możemy dobrać taką liczbę $\eta > 0$, że

$$|h| < \eta,$$

pociąga

$$|s_p(x+h) - S_p(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ze (122) wynika

$$|s(x+h) - s(x)| < |S_p(x+h) - S_p(x)| + |R_p(x+h) + R_p(x)|,$$

czyli

$$|s(x+h) - \mathrm{s}(x| < \varepsilon.$$

Funkcja $s(x)$ jest więc ciągła w punkcie x.

Udowodnione twierdzenie jest przypadkiem szczególnym twierdzenia ogólniejszego, które brzmi:

Jeżeli szereg (115) jest jednostajnie zbieżny w (m, n) *i jeżeli wyrazy tego szeregu dla* $x = a$, $(m < a < n)$, *posiadają granicę w punkcie* $x = a$ *to ta granica jest sumą granic poszczególnych wyrazów szeregu*; w tem wysłowieniu zawarte są właściwie trzy twierdzenia, zależnie od tego, czy granica jest granicą lewostronną, prawostronną, czy też obustronną.

Przypuśćmy, np., że chodzi o granicę prawostronną w punkcie a. Granicę tę dla wyrazu $u_p(x)$ szeregu (115)

oznaczać będziemy przez $u_p(a+0)$, tak, iż gdy x zmierza do a prawostronnie $u_p(x) \to u_p(a+0)$.

$s(x) = s_p(x) + R_p(x)$; $|R_p(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$, dla x w (m, n), przy ustalonem p: $p > p_0$;

$$s_p(x) \to s(a+0) \text{ z prawej strony,}$$

można więc do ε dobrać takie prawostronne otoczenie punktu a, by

$$|s_p(x'') - s_p(x')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

$$|R_p(x')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad R_p(x'') < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$s(x'') - s(x') = \{s_p(x'') - s_p(x')\} + R_p(x'') - R_p(x'),$$

$$|s(x'') - s(x')| \leqq |s_p(x'') - s_p(x')| + |R_p(x'')| + |R_p(x')|,$$

czyli

$$|s(x'') - s(x')| < \varepsilon,$$

skoro tylko x'' i x' w prawostronnem otoczeniu punktu a. Ta ostatnia nierówność wyraża warunek konieczny i dostateczny (l. 69) istnienia granicy prawostronnej $s(a+0)$.

Tak więc udowodniliśmy, że $s(x) \to s(a+0)$ z prawej strony.

Udowodniliśmy teraz, że $s(a+0)$ równa się sumie

$$u_1(a+0) + u_2(a+0) + u_3(a+0) + \ldots + u_p(a+0) + \ldots$$

Wyznaczmy p. jak poprzednio, tak, by reszta $|R_p(x)|$ była mniejsza od $\frac{\varepsilon}{3}$ w całym naszym przedziale, co jest możliwe, bo funkcja jest w tym przedziale jednostajnie zbieżna (wystarczy $p > p_0$). Ustalmy p tak, by ten warunek był spełniony.

Ponieważ

$$s_p(x) \to s_p(a+0) = u_1(a+0) + u_2(a+0) + \ldots + u_p(a+0),$$

więc można znaleźć takie otoczenie prawostronne punktu a, że dla każdego x w tem otoczeniu

$$|s_p(x) - s_p(a+0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{123}$$

(124) $s(x+0)-s_p(a+0)-s(x)+s(x)-s_p(a+0)=$
$$=\{s(a+0)-s(x)\}+\{s_p(x)-s_p(a+0)\}+R_p(x).$$

Ponieważ $s(x)\to s(a+0)$, jak to udowodniliśmy przed chwilą, istnieje więc prawostronne otoczenie punktu a takie, że skoro tylko x należy do tego otoczenia, to

(125) $|s(a+0)-s(x)|<\frac{1}{3}\varepsilon$; dalej $|R_p(x)|<\frac{1}{3}\varepsilon$; $(p>p_0)$;

ze wzoru (124) wynika

$$|s(a+0)-s_p(a+0)|\leqslant|s(a+0)-s(x)|+$$
$$+|s_p(x)-s_p(a+0)|+|R_p(x)|,$$

a więc $|s(a+0)-s_p(a+0)|<\varepsilon$, na mocy (123) i (125). Nierówność taka będzie spełniona dla każdej wartości liczby $\varepsilon>0$, t. j. jakkolwiek małą jest ta liczba ε, i dla wszystkich wartości p większych od $p_0(\varepsilon)$.

Stąd wniosek, że

$$\lim_{p\to 0} s_p(a+0)=s(a+0),$$

czyli

$$u_1(a+0)+u_2(a+0)+...+u_p(a+0)+...=s(a+0),$$

co trzeba było udowodnić.

Poprzednio (l. 68) udowodniliśmy, że granica sumy równa się sumie granic, z tem zastrzeżeniem, że liczba składników jest skończona; teraz uwolniliśmy się od tego zastrzeżenia, bo liczba składników może być nieskończona, ale zastrzegliśmy zbieżność jednostajną szeregu, utworzonego przez te składniki.

Tak samo (patrz 70), udowodniliśmy poprzednio, że suma funkcyj ciągłych jest funkcją ciągłą, z tem znowu zastrzeżeniem, że liczba składników jest skończona. Teraz uwolniliśmy się od tego zastrzeżenia, ale mamy nowe zastrzeżenie w przypadku, gdy liczba funkcyj jest nieskończona, tyczące się jednostajnej zbieżności szeregu utworzonego z tych funkcyj.

Udowodniliśmy poprzednio, że pochodna sumy funk-

cyj posiadających pochodne w punkcie x równa się sumie pochodnych, z zastrzeżeniem znowu, że liczba składników jest skończona (l. 91). Możemy teraz udowodnić, że jeżeli pochodne $u'_p(x)$ wyrazów $u_p(x)$ szeregu (115) tworzą szereg jednostajnie zbieżny w (m, n), to suma tego szeregu pochodnych równa się pochodnej sumy danego szeregu (115).

Zakładamy więc, że $u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots + u'_p(x) + \ldots$ jest szeregiem jednostajnie zbieżnym w (m, n). Wynika stąd istnienie takiego wskaźnika $p_0(\varepsilon)$, że skoro tylko $p \geqslant p_0$, to $|R_p^{(1)}(x)| < \frac{1}{8}\varepsilon$ dla każdej wartości x w (m, n), gdzie $R_p^{(1)}(x)$ oznacza resztę szeregu pochodnych.

Kładąc

$$\sigma(a) = u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots + u'_p(x) + \ldots = s'_p(x) + R_p^{(1)}(x),$$

gdzie $s'_p(x)$ oznacza sumę p wyrazów tego szeregu pochodnych, wiemy, że $s'_p(x)$ jest pochodną funkcji $s_p(x)$, gdzie $s_p(x)$ jest sumą częściową p wyrazów szeregu (115); $s(x) = s_p(x) + R_p(x)$, gdzie $s(x)$ oznacza sumę szeregu (115), a $R_p(x)$ jego resztę; mamy udowodnić, że $\sigma(x)$ jest pochodną funkcji $s(x)$, t. j., że $\sigma(x) = s'(x)$. Oczywiście, nie możemy twierdzić bez dowodu, że $R_p^{(1)}(x)$ jest pochodną reszty $R_p(x)$, gdyż tu w grę wchodzi nieskończenie wiele wyrazów (przeciwnie, $s_p(x)$ i $s'_p(x)$ zawierają tylko skończoną liczbę wyrazów).

Co do szeregu (115), zakładamy tylko jego zbieżność w (m, n), ale nie potrzebujemy zakładać zbieżności jednostajnej.

Wskaźnik p_0 ustalimy, jak było wyjaśnione przed chwilą; wtedy $(p > p_0)$

$$(126) \qquad |u'_{p_0+1}(x) + u'_{p_0+2}(x) + \ldots + u'_p(x)| < \tfrac{1}{4}\varepsilon,$$

ponieważ suma wyrazów od $p_0 + 1$ do p równa się różnicy $R_{p_0}^{(1)}(x) - R_p^{(1)}(x)$, a wartość bezwzględna każdej z tych reszt jest mniejsza od $\frac{1}{8}\varepsilon$, (bo tak wybraliśmy p_0).

Wskaźnik p może być dowolnie wielki, w każdym razie $p > p_0$.

$$\frac{s_p(x+h)-s_p(x)}{h}=\frac{s_{p_0}(x+h)-s_{p_0}(x)}{h}+\frac{u_{p_1+1}(x+h)-u_{p_0+1}(x)}{h}+$$
$$+\frac{u_{p_0+2}(x+h)-u_{p_0+2}(x)}{h}+\ldots+\frac{u_p(x+h)-u_p(x)}{h}=$$
$$=\frac{s_{p_0}(x+h)+s_{p_1}(x)}{h}+u'_{p_0+1}(x+\theta h)+u'_{p_0+2}(x+\theta h)+\ldots$$
$$\ldots+u'_p(x+\theta h);$$

(wzór na wartość średnią), a więc:

$$\frac{s_p(x+h)-s_p(x)}{h}-s'_p(x)=\frac{s_{p_0}(x+h)-s_{p_0}(x)}{h}-s'_{p^0}(x)+$$
$$+u'_{p_0+1}(x+\theta h)-u'_{p_0+1}(x)+u'_{p_0+2}(x+\theta h)-u'_{p_0+2}(x)+\ldots$$
$$\ldots+u'_p(x+\theta h)-u'_p(x);$$

(127) $$\left|\frac{s_p(x+h)-s_p(x)}{h}-s'_p(x)\right|\leqslant\left|\frac{s_{p_0}(x+h)-s_{p_0}(x)}{h}-s_{p_0}(x)\right|+$$
$$+\left|u'_{p_0+1}(x+\theta h)+u'_{p_0+2}(x+\theta h)+\ldots+u'_p(x+\theta h)\right|+$$
$$+\left|u'_{p_0+1}(x)+u'_{p_0+2}(x)+\ldots+u'_p(x)\right|.$$

Ponieważ $\lim\left\{\frac{s_{p_0}(x+h)-s_{p_0}(x)}{h}-s'_{p_0}(x)\right\}=0$, bo $s_{p_0}(x)$ jest sumą skończonej liczby składników, więc można znaleźć takie otoczenie punktu x, o ile $x+h$ należy do tego otoczenia, t. j. $0<|h|\leqslant\eta$, to

(128) $$\left|\frac{s_{p_0}(x+h)-s_{p_0}(x)}{h}-s'_{p_0}(x)\right|<\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Wyrażenie po drugiej stronie nierówności (127) jest sumą trzech składników, z których pierwszy mniejszy jest od $\frac{1}{2}\varepsilon$ na zasadzie (128), a każdy z dwóch pozostałych* jest mniejszy od $\frac{1}{4}\varepsilon$ na zasadzie (126). Tak więc

(129) $$\left|\frac{s_p(x+h)-s_p(x)}{h}-s'_p(x)\right|<\varepsilon$$

* Punkt $x+h$, a więc i $x+\theta h$ należy do przedziału (m, n).

dla x i $x+h$ w (m, n); $0<|h|\leqslant\eta$ i $p>p_0$. Ustaliwszy h, niech teraz $p\to\infty$; $\lim\frac{s_p(x+h)-s_p(x)}{h}=$

$$=\frac{1}{h}\left\{\lim_{p\to\infty}s_p(x+h)-\lim_{p\to\infty}s_p(x)\right\}=\frac{1}{h}\left\{s(x+h)-s(x)\right\},$$ bo szereg (115) jest zbieżny w (m, n),

$$\lim s'_p(x)=u'_1(x)+u'_2(x)+\ldots+u'_l(x)+\ldots=\sigma(x);$$

tak więc, przy przejściu do granicy dla $p\to\infty$, z (129) otrzymamy

(130) $$\left|\frac{s(x+h)-s(x)}{h}-\sigma(x)\right|<\varepsilon;$$

ponieważ w (130) ε może być liczbą tak małą jak się podoba pod warunkiem, że $0<h\leqslant\eta$, gdzie $\eta>0$ jest dobrane do ε, to stąd wynika

(131) $$\lim_{h\to0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h}=\sigma(x),$$

lecz

$$\lim_{h\to0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h}=s'(x),$$

$$\sigma(x)=s'(x).$$

$\sigma(x)$ jest sumą szeregu pochodnych $u'_1(x)+u'_2(x)+\ldots$ $\ldots+u'_p(x)+\ldots$

$s'(x)$ jest pochodną sumy $s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots$ $\ldots+u_p(x)+\ldots$ Twierdzenie jest więc udowodnione.

Gdy $\sigma(x)=s'(x)$, mówimy, że można otrzymać pochodną albo różniczkę szeregu, różniczkując wyraz po wyrazie, czyli z

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_p(x)+\ldots$$

wynika *wtedy:*

$$ds(x)=du_1(x)+du_2(x)+\ldots+du_p(x)\ldots$$

Twierdzenia te są bardzo ważne; wynika, naprzykład, z pierwszego z udowodnionych w tym rozdziale twierdzeń,

że suma funkcyj ciągłych, (gdy liczba składników jest nieskończona) może być funkcją nieciągłą; wystarczy uprzytomnić sobie przykład Nr 2 tego rozdziału.

Inny przykład jest następujący:

$$s(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^3}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^p}+\ldots$$

$$s_p(x)=1-\frac{1}{(1+x^2)^p};$$

$$s_p(0)=0;$$

przechodząc do granicy, widzimy, że $s(x)=\lim\limits_{p\to\infty} s_p(x)=1$ dla $x\neq 0$ i że $s(0)=\lim s_p(0)=0$.

Każdy ze składników powyższej sumy jest funkcją ciągłą zmiennej x dla każdej wartości x, lecz suma $s(x)$ tego szeregu jest funkcją nieciągłą zmiennej x, gdyż równa się jedności dla $x\neq 0$, a równa się zeru dla $x=0$; $s(x)$ jest więc funkcją nieciągłą w punkcie $x=0$; pochodzi to stąd, że szereg nasz nie jest jednostajnie zbieżny w dowolnym przedziale, zawierającym punkt 0. Nie należy jednak myśleć, że niejednostajna zbieżność szeregu o wyrazach ciągłych pociąga za sobą zawsze nieciągłość sumy tego szeregu. Wystarczy, np., zwrócić się do przykładu pierwszego

$$s(x)=(x-xe^{-x^2})+(xe^{-x^2}-2xe^{-2x^2})+\ldots$$
$$\ldots+\{(p-1)e^{-(p-1)x^2}-pe^{-px^2}\}+\ldots;$$

suma tego szeregu $s(x)=x$ dla każdej wartości x, ponieważ tu $s(0)=0$.

Natomiast, funkcja nieciągła w punkcie x nie może być sumą szeregu jednostajnie zbieżnego o wyrazach ciągłych; oczywiście, mowa tu o jednostajnej zbieżności w przedziale, zawierającym punkt x. Nieciągłość sumy szeregu o wyrazach ciągłych jest więc dowodem niejednostajnej zbieżności szeregu w przedziale, zawierającym punkt nieciągłości.

Możemy więc powiedzieć, że *zbieżność jednostajna* jest warunkiem *dostatecznym*, ale nie *koniecznym* ciągłości sumy szeregu zbieżnego o wyrazach ciągłych.

Warunek konieczny i dostateczny (Arzelà) jest następujący.

Szereg (115) spełnia warunki (W):

1) jest zbieżny w (m, n);

2) do każdej liczby $\varepsilon > 0$ dowolnie małej i do każdej liczby N dowolnie wielkiej można dobrać liczbę $N' \geqslant N$, taką, że dla każdej wartości zmiennej x w przedziale (m, n) istnieje wskaźnik p_x, zależny od x, ale spełniający warunek

$$N \leqslant p_x \leqslant N'$$

i taki, że

$$|R_{p_x}(x)| < \varepsilon;$$

w tej ostatniej nierówności p_x może być zmienne wraz ze zmienną x w (m, n), ale musi być jedną z liczb całkowitych przedziału (N, N').

Warunek ten jest dostateczny.

Niech x' oznacza dowolny punkt przedziału (m, n) i niech N oznacza taką liczbę, by

(132) $$|R_p(x')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon;$$

skoro $p > N$; jest to możliwe z powodu założonej zbieżności szeregu w punkcie x' w przedziale (m, n). Lecz do każdej liczby N, na mocy założenia, można dobrać taką liczbę N', że dla każdego x w (m, n) mamy

(133) $$|R_{p_x}(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

przyczem p_x należy do przedziału (N, N'); ponieważ p_x dla każdego x jest większe od N, więc

(134) $$|R_{p_x}(x')| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{na zasadzie (132).}$$

Sumy $s_\upsilon(x)$ dla $\upsilon \leqslant N'$ są funkcjami ciągłemi zmiennej x w (m, n), a więc i w otoczeniu punktu x'; można więc znaleźć takie otoczenie punktu x', że skoro x'' należy do tego otoczenia, t. j.

$$|x' - x''| < \eta, \text{ to}$$

(135) $$|s_{p_{x''}}(x') - s_{p_{x''}}(x'')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

ponieważ $p_{x''} \leqslant N'$. Zauważymy dalej, że

(136) $$\begin{aligned} &|R_{p_{x''}}(x'')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \text{ na zasadzie (133)},\\ &|R_{p_{x''}}(x')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \text{ na zasadzie (134).}\end{aligned}$$

$$s(x'') - s(x') = s_{p_{x''}}(x'') + R_{p_{x''}}(x'') - \{s_{p_{x''}}(x') + R_{p_{x''}}(x')\} =$$
$$= \{s_{p_{x''}}(x'') - s_{p_{x''}}(x')\} + R_{p_{x''}}(x'') - R_{p_{x''}}(x');$$

przechodząc do wartości bezwzględnych, na zasadzie (135) i (136) otrzymamy:

$$|s(x'') - s(x')| < \varepsilon, \text{ o ile tylko } |x' - x''| \leqslant \eta;$$

suma $s(x)$ szeregu jest więc funkcją ciągłą zmiennej x w punkcie x'; ponieważ punkt x' jest dowolnym punktem przedziału (m, n), więc funkcja $s(x)$ jest ciągła w (m, n).*

Teraz udowodnimy, że podane warunki są konieczne, t. j. załóżmy, że szereg (115) jest zbieżny w (m, n) i że wyrazy tego szeregu jako też jego suma są funkcjami ciągłemi zmiennej x w (m, n).

Ponieważ szereg (115) jest zbieżny w (m, n), więc do każdej liczby x przedziału $(m. n)$ i do każdej dowolnie wielkiej liczby N, danej z góry, można dobrać taką liczbę $p_x > N$, tak by

$$|R_{p_x}(x)| < \varepsilon;$$

tu nie chodzi o to, czy „prawie“ wszystkie reszty, zacząwszy od pewnego wskaźnika co do wartości bezwzględnej były mniejsze od ε; wystarczy, by istniał choć jeden taki wskaźnik większy od N, by dla niego wartość bezwzględna reszty była mniejsza od ε. Liczbę p_x wyznaczymy jako funkcję zmiennej x w sposób jednoznaczny, jeśli określimy p_x jako najmniejszą liczbę całkowitą, spełniającą powyższy warunek. Ta liczba jest mniejsza, a co najwyżej równa tej liczbie $p_0(x, \varepsilon)$, dla której nierówność $|Rp(x)| < \varepsilon$ jest spełniona dla każdego $p \geqslant p_0(x, \varepsilon)$, o której to liczbie $p_0(x, \varepsilon)$ mowa była na początku tego rozdziału. Twierdzimy, że funkcja p_x jest ograniczona w (m, n). Znaczy to, że istnieje liczba $N' \geqslant N$, taka, że p_x dla każdego x spełnia nierówność $N < p_x \leqslant N'$, a oprócz tego $|R_{p_x}(x)| < \varepsilon$ w (m, n). Widzimy więc, że ograniczoność od góry funkcji p_a pociąga za sobą spełnienie warunków, które stanowią o prawdziwości dowodzonej przez nas tezy.

Twierdzenie nasze będzie udowodnione, o ile wykażemy, że p_x jest funkcją zmiennej x, ograniczoną od góry w $(m, n,)$. W tym celu udowodnijmy najprzód, że jest funkcją ograniczoną od góry w otoczeniu każdego punktu x' przedziału (m, n). Z powodu założonej ciągłości $s(x)$ w (m, n) istnieje takie otoczenie punktu x', wyrażone, np., przez nierówność $|x' - x| \leqslant \eta$, że w tem otoczeniu

---

* Gdy $x' = m$ lub $x' = n$, należy brać otoczenie odpowiednio prawo lub lewostronne punktu x'; żadnych pozatem zmian w dowodzeniu nie będzie, jak się czytelnik z łatwością sam przekona.

(137) $$|s(x) - s(x')| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

na zasadzie zbieżności szeregu (115) w punkcie x'.

Po ustaleniu w ten sposób wskaźnika $l(x')$, możemy dobrać takie otoczenie punktu x', wyrażone, np., przez nierówność $|x' - x| \leqslant \eta_1$, aby w tem otoczeniu

(139) $$|s_{l(x')}(x)\, s_{l(x')} - (x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

otóż

$$s(x) - s(x') = s_{l(x')}(x) - s_{l(x')}(x') + R_{l(x')}(x) - R_{l(x')}(x'), \text{ i}$$

(140) $$R_{l(x')}(x) = \{s_{l(x')}(x') - s_{l(x')}(x)\} + \{s(x) - s(x')\} + R_{l(x')}(x').$$

Przechodząc w (140) do wartości bezwzględnej wyrazów i uwzględniając (137), (138) i (139), otrzymamy:

$$|R_{l(x')}(x)| < \varepsilon, \text{ dla każego } x,$$

spełniającego warunek $|x' - x| \leqslant \delta$, gdzie δ mniejsza z dwóch liczb η_1 i η_2, t. j. dla każdego x w dostatecznie małem otoczeniu punktu x'.

Liczba tylko co określona $l(x')$ spełnia w przedziale $(x' - \delta, x' + \delta)$ warunki, które posłużyły nam do określenia liczby p_x, z wyjątkiem warunku, że jest to liczba najmniejsza spełniająca te wymagania. Stąd wynika, że $p_x \leqslant l(x')$ w przedziale $(x' - \delta, x' + \delta)$, t. j. dla $|x' - x| < \delta$. Dowodzi to, że funkcja p_x jest ograniczona od góry w otoczeniu punktu x'; punkt x' jest dowolnym punktem (m, n). Lecz (patrz l. 65) funkcja, ograniczona w otoczeniu każdego punktu przedziału, jest ograniczona w przedziale.

Tak więc funkcja p_x jest ograniczona w przedziale (m, n). A więc istnieje liczba N' taka, że $p_x \leqslant N'$ dla każdego x w (m, n) i warunki (W) są spełnione; są więc one konieczne.

Zauważymy na zakończenie, że zagadnienie, kiedy suma szeregu o wyrazach ciągłych jest funkcją ciągłą, a kiedy nie jest funkcją ciągłą, jest tylko przypadkiem szczególnem zagadnienia o zmianie porządku dwóch kolejnych przejść do granicy; mianowicie wartość funkcji $s(x)$, sumy szeregu (115), w punkcie a jest według określenia sumy szeregu, granicą

$$s(a) = \lim_{n\to\infty} s_n(a) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \lim_{x\to a} s_n(x) \right\},$$

na mocy ciągłości $s_n(x)$; z drugiej strony $s(x) = \lim s_n(x)$, ciągłość funkcji $s(x)$ polega na tem, że $\lim\limits_{x\to a} s(x) = s(a)$;

czyli ciągłość sumy $s(x)$ wyrazi się wzorem:

$$\lim_{x\to a}\left\{\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{x\to a} s_n(x)\right\},$$

rzeczywiście, mamy do czynienia z zagadnieniem o dwóch kolejnych przejściach do granicy, $n\to\infty$ i $x\to a$.

Szeregi potęgowe.

119. *Określenia i twierdzenia zasadnicze.*

Do najważniejszych szeregów w matematyce należą szeregi potęgowe i trygonometryczne. Szeregami trygonometrycznemi zajmiemy się później w tomie następnym. Niniejszy zaś rozdział poświęcimy szeregom potęgowym.

Szeregiem potęgowym nazywamy szereg kształtu

(141) $$a_0+a_1+a_2+a_3x^3+\dots+a_px^p+\dots;$$

liczby $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p, \dots$, nazywają się spółczynnikami szeregu potęgowego. Wielomian jest szeregiem potęgowym, w którym „prawie" wszystkie spółczynniki a_p równe są zeru; postęp geometryczny daje szereg potęgowy, w którym wszystkie spółczynniki a_p są sobie równe.

Szereg potęgowy jest dany, gdy dane są jego spółczynniki a_p. Każdy szereg potęgowy jest zbieżny dla $x=0$. Są szeregi potęgowe, które są zbieżne tylko dla $x=0$, jak np., szereg

$$1+x+2!\,x^2+3!\,x^3+\dots+n!\,x^n+\dots,$$

tu stosunek $\frac{u}{u_{n-1}}=nx$; ponieważ przy $x\neq 0$, $nx\to\infty$, gdy $n\to\infty$, więc (kryterjum d'Alemberta l. 50) dla $x\neq 0$ szereg jest rozbieżny. Szereg potęgowy może być zbieżny dla każdej wartości zmiennej x, takim, np., jest szereg

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots!$$

Pośrednie miejsce zajmują szeregi, które są zbieżne

dla niektórych wartości zmienej x, a rozbieżne dla innych wartości tej zmiennej; tak, np., szereg

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

jest zbieżny dla $|x| < 1$, t. j. w przedziale $(-1, 1)$, z wyłączeniem krańców przedziału -1 i $+1$, t. j. w przedziale niewłaściwym.

Zbiór wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej x, dla których szereg jest zbieżny nazywa się obszarem zbieżności tego szeregu.

Powstaje zagadnienie: jaki jest obszar zbieżności tego szeregu.

Jeżeli szereg potęgowy (137) jest zbieżny dla $x = x_0$, to zbiór wyrazów tego szeregu

$$a_0,\ a_1 x_0,\ a_2 x^2{}_0,\ a_3 x^3{}_0, \ldots,\ a_p x^p{}_0, \ldots$$

stanowi zbiór ograniczony; w rzeczy samej, $\lim\limits_{p \to \infty} a_p x^p{}_0 = 0$, a więc „prawie" dla wszystkich wartości p zachodzi nierówność $|a_p x^p| < M'$, gdzie M' jest liczbą dodatnią dowolną; tylko skończona liczba wyrazów $|a_p x^p|$ może nie spełniać warunku $|a_p x^p| < M'$; niech M oznacza liczbę większą od tych wszystkich wyrazów $|a_p x^p|$, w liczbie skończonej, które nie są mniejsze od M'; jasna rzecz, że wtedy $|a_p x^p| < M$, dla każdej wartości wskaźnika p.

Odwrotnie, niech $l > 0$ oznacza liczbę taką, że zbiór wyrazów szeregu, czyli ciąg

(138) $$a_0,\ a_1 l,\ a_2 l^2,\ a_3 l^3, \ldots,\ a_p l^p, \ldots$$

stanowi zbiór ograniczony (od góry i od dołu). Szereg (137) może być rozbieżny dla $x = l$, (może być i zbieżny), ale jest z pewnością zbieżny dla wszystkich wartości zmiennej x, należących do przedziału niewłaściwego $(-l, l)$, t. j. w przedziale bez krańców.

Wynika to z twierdzenia A, l. 117, przytem zbieżność jest bezwzględna i jednostajna.

Szereg, utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu

(139) $$1+\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}+\ldots+\frac{x^r}{l^p}+\ldots,$$

w którym $u_p(x)=\left(\frac{x}{l}\right)^p$ jest szeregiem zbieżnym jednostajnie* w przedziale niewłaściwym $(-l, l)$, gdyż jest to szereg (postęp) geometryczny (patrz l. 46, przykład 3).

Utożsamijmy teraz wyrazy ciągu (138) ograniczonego z wyrazami v_p twierdzenia z rozdziału 117.

Szereg $u_1 v_1+u_2 v_2+\ldots+u_p v_p+\ldots$ jest według wzmiankowanego twierdzenia szeregiem jednostajnie zbieżnym w tym samym obszarze, co i szereg (139), t. j. w $(-l, l)$ bez krańców przedziału. Lecz iloczyn

$$u_p(x) \,.\, v_p(x)=a_p l^p \,.\, \frac{x^p}{l^p}=a_p x^p$$

jest wyrazem szeregu (137).

---

* Że postęp geometryczny daje szereg $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{x}{l}\right)^p$ zbieżny dla $|x|<l$, to wiemy (l. 46). Co do zbieżności jednostajnej, zauważymy, że skoro $|x|<l$, to można znaleźć liczbę l' taką, by $|x|<l'<l$ i wartość bezwzględna wyrazów szeregu (138) jest mniejsza od $\left(\frac{l'}{l}\right)^p$; lecz szereg $\sum\left(\frac{l'}{l}\right)^p$ jest zbieżny. Reszta szeregu $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{|x|}{l}\right)^p$ jest mniejsza od reszty szeregu $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{l'}{l}\right)^p$. Oznaczmy przez R_n resztę szeregu $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{|x|}{l}\right)^p$ a przez $R_n^{(1)}$ resztę szeregu $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{l'}{l}\right)^p$; udowodniliśmy w tej chwili, że $0<R_n<R_n^{(1)}$ lecz $R_n^{(1)}$ jest resztą szeregu, którego wyrazy nie zależą od zmiennej x. Można do każdego $\varepsilon>0$ dobrać wskaźnik v taki, by $n>v$ pociągało $R_n^{(1)}<\varepsilon$; ale w takim razie będzie także $|R_n|<\varepsilon$ dla każdego $n>v$ niezależnie od wartości x, byle tylko $|x|<l'<l$. Zbieżność jest więc jednostajna.

A więc szereg (137) jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w przedziale niewłaściwym $(-l, l)$.

Z udowodnionych twierdzeń prostego i odwrotnego wynikają następujące wnioski: jeżeli szereg (137) jest zbieżny dla $x = x_0 > 0$ to jest zbieżny dla każdej wartości x takiej, że $|x| < x_0$; jeżeli szereg (137) jest rozbieżny dla $x = \alpha > 0$, to jest rozbieżny dla każdej wartości x takiej, że $|x| > \alpha$.

Promień zbieżności.

Jeżeli dla pewnej wartości zmiennej x szereg (137) jest rozbieżny, to istnieje liczba $\rho \geqslant 0$, zwana promieniem zbieżności szeregu potęgowego, taka, że szereg jest zbieżny dla każdej wartości x, należącej do przedziału niewłaściwego $(-\rho, +\rho)$, t. j. dla $|x| < \rho$, szereg zaś jest rozbieżny dla każdej wartości x spełniającej warunek $|x| > \rho$; gdy zaś $x = \rho$ lub $-\rho$, to szereg może być zbieżny lub rozbieżny, zależnie od właściwości indywidualnych szeregu.

W rzeczy samej, możemy utworzyć przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych nieujemnych, zaliczając do pierwszej klasy każdą liczbę nieujemną α taką, że dla $x = \alpha$ szereg (117) jest zbieżny, a do drugiej klasy każdą taką liczbę $\beta > 0$, dla której szereg (117) jest rozbieżny; żadna klasa nie jest pusta, gdyż do pierwszej należy z pewnością liczba nieujemna $x = 0$, istnienie zaś liczby drugiej klasy zakładamy. Każda liczba pierwszej klasy jest mniejsza od każdej liczby drugiej klasy (dlaczego?). Nasz podział na dwie klasy jest więc przekrojem w dziedzinie liczb rzeczywistych (l. 14). Taki przekrój wyznacza liczbę, dajmy na to ρ, która należy bądź do pierwszej bądź do drugiej Ta liczba ρ jest promieniem zbieżności szeregu (117). Jeżeli $\rho = 0$, to znaczy, że szereg jest rozbieżny dla każdej wartości $x \neq 0$. Jeżeli $\rho > 0$, to $\rho - \varepsilon$ należy do klasy pierwszej dla dowolnie małej wartości $0 < \varepsilon < \rho$, a więc szereg jest zbieżny na zasadzie udowodnionego twierdzenia

w przedziale $(-\rho+\varepsilon, \rho-\varepsilon)$; ponieważ ε jest liczbą do wolnie małą, wynika stąd zbieżność szeregu (117) w przedziale niewłaściwym $(-\rho, \rho)$. Poza podziałem właściwym $(-\rho, \rho)$ szereg zbieżny być nie może; gdyby bowiem szereg był zbieżny dla pewnej wartości x_0 takiej, że $|x_0| > \rho$, to szereg byłby zbieżny dla każdego x w przedziale niewłaściwym $(-|x_0|, |x_0|)$; niech α oznacza liczbę większą od ρ, a mniejszą od $|x_0|$, co możliwe, bo $|x_0| > \rho$; liczba α należy do przedziału niewłaściwego $(-|x_0|, |x_0|)$, a więc szereg byłby zbieżny dla wartości zmiennej $x = \alpha > 0$, lecz to niemożliwe, bo $\alpha > \rho$ i jako taka należy do klasy drugiej; doszliśmy więc do sprzeczności, co wskazuje, że po za przedziałem $(-\rho, \rho)$ szereg zbieżnym być nie może.

Możemy wprowadzić promień zbieżności nieskończony na zasadzie następującej: orzeczenie „promień zbieżności szeregu potęgowego jest nieskończony“, co piszemy $\rho = \infty$, oznacza to samo, co orzeczenie „szereg jest zbieżny dla każdej wartości liczbowej zmiennej x“.

W przypadku, gdy nie jest ρ ani $=0$, ani ∞, powstaje zagadnienie, jak się zachowuje szereg dla $x = \rho$ i dla $= -\rho$. Tu mogą zajść wszystkie ewentualności. Szereg może być rozbieżny i dla $x = \rho$ i dla $x = -\rho$; ma to miejsce, np., dla szeregu

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots;$$

w tym przykładzie $\rho = 1$, szereg jest zbieżny wewnątrz przedziału $(-1, 1)$, lecz na krańcach przedziału, t. j. dla $x = -1$ i $x = +1$, szereg jest rozbieżny.

Natomiast szereg

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^p}{p} + \ldots,$$

dla którego także $\rho = 1$, jest zbieżny w punkcie $x = -1$, a rozbieżny w punkcie $x = 1$, (patrz l. 46 i 56).

Wreszcie szereg

$$1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+\ldots+\frac{x^p}{p^2}+\ldots,$$

którego promień zbieżności ρ jest także $=1$, jest szeregiem zbieżnym i dla $x=-1$ i dla $x=+1$, (patrz l. 49).

Dla wyznaczenia liczby ρ możemy zastosować kryterjum Cauchy'ego w postaci wyłożonej w artykule l. 50.

Otrzymamy twierdzenie następujące: jeżeli największa z granic ciągu

(140) $$\sqrt{|a_2|},\ \sqrt[3]{|a_3|},\ \sqrt[4]{|a_4|},\ldots,\ \sqrt[n]{|a_n|},\ldots$$

jest liczbą skończoną $\overline{G} \neq 0$, to promień zbieżności ρ szeregu (137) jest odwrotnością tej największej z granic $\overline{G}$ czyli $\rho=\frac{1}{\overline{G}}$;

Jeżeli $\overline{G}=\infty$, to $\rho=0$;

Jeżeli $\overline{G}=0$, to $\rho=\infty$, t. j. szereg jest zbieżny dla każdej wartości zmiennej x. Rozważania l. 50 możemy zastosować do szeregu utworzonego z wartości bezwzględnych szeregu (137). Ciąg (12) z artykułu l. 50 przyjmie postać

(141) $$|x|\,.\sqrt{|a_2|},\ |x|\,.\sqrt[3]{|a_3|},\ldots,\ |x|\,.\sqrt[n]{|a_n|},\ldots$$

Jeżeli $\overline{G}$ oznacza największą z granic ciągu (140), to $|x|\,.\,\overline{G}$ będzie największą z granic ciągu (131), utworzonego z wyrazów szeregu potęgowego. A więc szereg (136) będzie zbieżny, gdy największa z granic ciagu (141) jest mniejsza od jedności, a rozbieżny, gdy największa z granic ciągu (141) jest większa od jedności, czyli,

gdy $|x|\,.\,\overline{G}<1$ szereg jest zbieżny,

gdy $|x|\,.\,\overline{G}>1$ szereg jest rozbieżny;

jeżeli $G \neq 0$, to zbieżność ma miejsce dla każdego x spełniającego warunek $|x|<\frac{1}{\overline{G}}$, a rozbieżność zachodzi dla

każdej wartości x, spełniającej warunek $|x| > \frac{1}{\overline{G}}$.

Jeżeli zestawimy otrzymany wynik z określeniem promienia zbieżności ρ, to odrazu widać, że

$$\rho = \frac{1}{\overline{G}} \quad (\overline{G} \neq 0);$$

jeżeli $\overline{G} = 0$, to $|x| . \overline{G} = 0$, t. j. zawsze $|x| . \overline{G} < 1$, dla każdego x; stąd wniosek, że wtedy szereg (137) jest zbieżny dla każdej wartości zmiennej x. Łatwo się przekonać, że w tym przypadku, (t. j. gdy $\overline{G} = 0$), najmniejsza z granic równa się zeru, gdyż wszystkie wyrazy ciągu (140) są dodatnie, a najmniejsza z granic nie może być większa od największej z granic. Lecz równość największej i najmniejszej z granic ciągu pociąga (l. 42) zbieżność tego ciągu, czyli istnienia granicy, która się równa wspólnej wartości największej i najmniejszej z granic, czyli jak w tym wypadku, zeru. Jeżeli $\overline{G} \neq 0$, to promień zbieżności jest skończony, a ciąg (140) albo nie posiada granicy, albo, jeżeli ma granicę, to musi się równać $\overline{G} \neq 0$, t. j. nie równa się 0. Widzimy więc, że

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, by szereg (137) był zbieżny dla wszystkich wartości zmiennej x.

Udowodnione twierdzenie nosi nazwę twierdzenia *Cauchy-Hadamard'a.*

Z tego ogólnego twierdzenia możemy otrzymać cały szereg przypadków szczególnych. Tak, np., jeżeli istnieje $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g$, to jak wiadomo $g = \overline{G}$, i $\rho = \frac{1}{g}$.

Jeżeli istnieje $\lim \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = g$, to, jak wiadomo (l. 50),

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ także istnieje i równa się g, tak więc $\frac{1}{\rho}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$, o ile ta granica istnieje i nie równa się zeru; jeżeli $\lim\limits_{n\to 0}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|=0$, to także $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$ i $\rho=\infty$.

120. *Pochodne sumy szeregu potęgowego.*

Jeżeli promień zbieżności szeregu potęgowego ρ nie równa się zeru, to szereg określa wewnątrz przedziału $(-\rho,\rho)$ pewną funkcję $s(x)$ zmiennej x

$$s(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_px^p+\ldots;$$

chodzi nam o pochodną funkcji $s(x)$. Gdyby liczba składników była skończona, t. j. gdyby prawie wszystkie spółczynniki a_p równe były zeru, to mielibyśmy zamiast szeregu postępowego wielomian i

(142) $$s'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+pa_px^{p-1}+\ldots,$$

na zasadzie twierdzenia, że pochodna sumy równa się sumie pochodnych; ale, jak wiemy, nie jest to koniecznie spełnione, gdy liczba składników jest nieskończona. Otóż udowodnimy, że wewnątrz przedziału $(-\rho,\rho)$ wzór (142) jest spełniony i dla szeregu potęgowego nieskończonego, czyli, na to, by otrzymać pochodną szeregu możemy wyrazy szeregu różniczkować wyraz po wyrazie.

W tym celu udowodnimy najprzód twierdzenie pomocnicze następujące: promieniem zbieżności szeregu

(143) $$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+pa_px^{p-1}+\ldots$$

jest także ρ, jeżeli ρ oznacza promień zbieżności szeregu (137), przytem twierdzenie jest słuszne także dla $\rho=0$ i dla $\rho=\infty$.

Oznaczmy przez ρ_1 promień zbieżności szeregu (143); z porównania wartości bezwzględnych wyrazów szeregów (143) i (137) $p|a_p|.|x|^{p-1}$ i $|a_p.|x|^p$, wynika, że prawie wszystkie wyrazy

$$p \,.\, |a_p| \,.\, |x|^{p-1} \text{ są większe od } |a_p| \,.\, |x|^p;$$

wystarczy zauważyć, iż to będzie miało miejsce skoro $p > |x|$. Promień zbieżność ρ_1 nie może być większy od ρ, gdyby bowiem $\rho_1 > \rho$, to szereg o wyrazach

$$p \,.\, |a_p| \,.\, |\rho_1 - \varepsilon|^{p-1}$$

byłby zbieżny, gdy tymczasem szereg o wyrazach dodatnich odpowiednio „prawie" zawsze mniejszych

$$|a_p| \,.\, |\rho_1 - \varepsilon|^p,$$

byłby rozbieżny, ($\varepsilon > 0$ jest liczbą tak dobraną, że $\rho_1 - \varepsilon > \rho$, czyli $\varepsilon < \rho_1 - \rho$).

Tak więc $\qquad \rho_1 \leqslant \rho.$

Możemy teraz udowodnić, że ρ_1 nie może być mniejsze od ρ. Niech α oznacza liczbę dodatnią, mniejszą od ρ i niech $\alpha < l < \rho$; szereg

$$(144) \quad 1 + 2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2} + \ldots + (p+1)\frac{x^p}{l^p} + \ldots$$

jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie dla $|x| \leqslant \alpha$; bo wyrazy tego szeregu są niewiększe co do wartości bezwzględnej od wyrazów szeregu liczbowego

$$1 + 2\frac{\alpha}{l} + 3\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\alpha}{l}\right)^3 + \ldots + (p+1)\left(\frac{\alpha}{l}\right)^p + \ldots,$$

który jest zbieżny (l. 50). Występuje tu zasada ogólna następująca: jeżeli wyrazy szeregu

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_p(x) + \ldots$$

są w (m, n) co do wartości bezwzględnej niewiększe odpowiednio od wyrazów szeregu liczbowego

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_p + \ldots$$

to szereg $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_p(x) + \ldots$ jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w (m, n); dowód tego twierdzenia jak w przypisku l. 119.

Ponieważ $l < \rho$, więc szereg liczbowy

$$a_0 + a_1 l + a_2 l^2 + a_3 l^3 + \ldots + a_p l^p + \ldots$$

jest zbieżny i zbiór wyrazów tego szeregu, jak udowodniliśmy l. 119, jest zbiorem ograniczonym; czyli istnieje liczba M taka, że

$$|a_p l^p| < M,$$

dla każdego p.

Mnożąc wyrazy szeregu (144) przez liczby ciągu ograniczonego

$$a_1,\ a_2 l,\ a_3 l^2, \ldots,\ a_{p+1} l^p, \ldots$$

otrzymamy szereg (143)

$$a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \ldots + (p+1) a_{p+1} x^p + \ldots$$

zbieżny (l. 119) w przedziale $(-\alpha, \alpha)$, gdzie α jest liczbą mniejszą od ρ, lecz dowolnie blizką liczby ρ; stąd wniosek, że szereg (143) jest jednostajnie zbieżny w przedziale niewłaściwym $(-\rho, \rho)$; nie może więc być $\rho_1 < \rho$.

Ponieważ nie może być ani $\rho_1 > \rho$ ani $\rho_1 < \rho$, więc $\rho_1 = \rho$.

Uwaga. Twierdzenie o równości $\rho_1 = \rho$ można udowodnić bezpośrednio, przez zastosowanie twierdzenia Cauchy-Hadamarda do szeregu (143). Wystarczy zauważyć, że największa z granic ciągu $|a_1|, 2^{1/2}|a_2|^{1/2}, 3^{1/3}.|a_3|^{1/3}, \ldots$, jest równa największej z granic ciągu $|a_1|, |a_2|^{1/2}, |a_3|^{1/3}, \ldots$, albowiem każdy punkt skupienia pierwszego z tych ciągów jest punktem skupienia drugiego i odwrotnie, gdyż $\lim\limits_{p\to\infty} p^{1/p} = 1$.

Niech g oznacza jakiś punkt skupienia ciągu

$$|a_1|, |a_2|^{1/2}, |a_3|^{1/3}, \ldots, a\, |a_{v_1}|^{1/v_1}, |a_{v_2}|^{1/v_2}|, \ldots, |a_{v_k}|^{1/v_k}, \ldots$$

wyrazy należące do otoczenia punktu g; łatwo się przekonać, że „prawie“ wszystkie wyrazy ciągu

$$\{v_1 . |a_{v_1}|\}^{1/v_1},\ \{v_2 . |a_{v_2}|\}^{1/v_2}, \ldots, \{v_k . |a_{v_k}|\}^{1/v_k}, \ldots$$

należą także do otoczenia punktu g.

Tak więc szeregi (137) i (143) mają ten sam obszar zbieżności, o ile wyłączyć krańce przedziału $(-\rho, \rho)$, co

do których nie da się powiedzieć nic ogólnego; tak, np., w szeregu $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$ punkt $x=-1$ jest punktem zbieżności, gdy natomiast szereg pochodny $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots$ jest w tym punkcie rozbieżny.

Przypomnijmy sobie teraz twierdzenie udowodnione na końcu rozdziału l. 118 „jeżeli szereg utworzony z pochodnych wyrazów szeregu danego jest w (m, n) jednostajnie zbieżny, to jego suma jest pochodną sumy szeregu danego“, i zastosujmy to twierdzenie do szeregu potęgowego (137); ponieważ szereg (143), utworzony z pochodnych jego wyrazów jest jednostajnie zbieżny w przedziale niewłaściwym $(-\rho, \rho)$, więc suma szeregu (143) jest pochodną sumy szeregu (137).

Tak więc szereg potęgowy (137), *dla którego* $\rho \neq 0$, *posiada w obszarze zbieżności pochodną, wyrażoną przez sumę szeregu* (143), *który to szereg otrzymamy przez różniczkowanie szeregu* (137) *wyraz po wyrazie.*

Do szeregu (143) możemy zastosować te same rozważania, co i do szeregu (137), otrzymamy szereg

$$2a_2+2.3\,a_3x+3.4.a_4x^2+\ldots+p(p+1)a_{p+1}x^{p-1}+\ldots$$

który daje nam drugą pochodną sumy $s(x)$ szeregu, t. j. $s''(x)$, (137) w przedziale niewłaściwym $(-\rho, \rho)$. Tak samo szeregi

$$2.3a_3+2.3.4.a_4x+\ldots+(p-1)p(p+1)a_{p+1}x^{p-2}+\ldots$$
$$2.3.4.a_4+2.3.4.5a_5+\ldots+(p-2)(p-1)p(p+1)a_{p+1}x^{p-3}+\ldots$$

i t. d. wyznaczają nam pochodne 3^{go}, 4^{go} i t. d. rzędu, t. d. $s'''(x)$, $s^{IV}(x)$ i t. d.

Z tych wzorów na pochodne $s'(x)$, $s''(x)$, $s'''(x)$, i t. d. otrzymujemy dla $x=0$

$$s(0)=a_0,\ s'(0)=a_1,\ s''(0)=2a_2,\ s'''(0)=2.3.a_2,\ldots$$
$$s^{(p)}(0)=p!\,a_p,\ldots$$

stąd wniosek taki:

Jeżeli funkcja $s(x)$ jest sumą szeregu potęgowego, to spółczynniki tego szeregu potęgowego mają wartości wyznaczone przez

$$a_0 = s(0),\ a_1 = s'(0).\ a_2 = \frac{s''(0)}{1.2},\ a_3 = \frac{s'''(0)}{1.2.3}, \ldots, a_p = \frac{s^{(p)}(0)}{p!}, \ldots$$

Jeżeli więc mamy dowolną funkcję $f(x)$ określoną w pewnym przedziale, zawierającym otoczenie punktu $x=0$ i jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w tym przedziale pochodne wszystkich rzędów, to naturalną drogą dochodzimy do szeregu

$$(145)\quad f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \ldots$$

Jednakże nie możemy twierdzić jeszcze, że sumą tego szeregu jest $f(x)$, nie wiemy nawet, czy jest zbieżny. Tyle tylko już wiemy, że, jeżeli funkcja $f(x)$ może być przedstawiona w postaci sumy szeregu potęgowego, czyli, jak się mówi, może być rozwinięta na szereg potęgowy, to ten szereg potęgowy jest z pewnością właśnie* szeregiem (145). Brakujące w tym względzie kryterjum znajdziemy w udowodnionem poprzednio twierdzeniu Taylor'a, z którego wyprowadzimy teraz szereg Taylor'a i Maclaurin'a.

121. *Szereg Taylor'a.*

Poprzednio (patrz l. 104) udowodniliśmy twierdzenie Taylora'a; z tego twierdzenia wysnuć możemy szereg

---

* Można to wyrazić jeszcze inaczej; jeżeli dwa szeregi są zbieżne w tym samym przedziale i mają sumy równe, to ich spółczynniki muszą być równe, t. j. tożsamość $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + \ldots$ $\ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p + \ldots$, w $(-\rho, \rho)$, pociąga $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_p = b_p, \ldots$ gdyż te rzeczy są jednoznacznie wyznaczone $a_0 = b_0 = s(0)$, $a_1 = b_1 = s'(0)$, .., $a_p = b_p = \dfrac{s^{(p)}(0)}{p!}$, ..., gdzie $s(x)$ oznacza wspólną sumę tych dwóch szeregów w $(-\rho, \rho)$. Jeszcze inaczej, możemy powiedzieć, że szereg potęgowy, zbieżny w $(-\rho, \rho)$, ma sumę równą zeru w tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie spółczynniki równają się zeru.

Taylor'a w sposób następujący: załóżmy, że funkcja $f(x)$ w przedziale (m, n) posiada pochodne wszystkich rzędów; załóżmy oprócz tego, że wyraz $R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-p)!\,p} f^{(n)}(x+\theta h)$, patrz l. 104 wzór (83), dąży do zera, gdy $n \to \infty$. Wzór (83) możemy napisać w postaci

$$f(x+h) = s_n + R_n;$$

przechodząc do granicy dla $n \to \infty$, mamy wtedy $f(x+h) = \lim s_n + \lim R_n = \lim s_n = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \ldots$, gdyż $\lim R_n = 0$ przyczem x i $x+h$ należą do (m, n); możemy wzór ten napisać w innej postaci, zastępując x przez a, h zaś przez x; warunki założenia muszą być spełnione w pewnym przedziale, zawierającym punkt a:

$$f(a+x) = f(a) + f'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \frac{x^3}{3!}f(a) + \ldots \ldots + \frac{x^p}{p!}f^{(p)}(x) + \ldots; \tag{146}$$

jeżeli we wzorze (146) uczynimy $a = 0$, to otrzymamy wzór Maclaurin'a (145); jeżeli w (146) $a + x$ zastąpimy przez x, a x przez $x - a$, to otrzymamy:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(x) + \ldots + \frac{(x-a)^p}{p!}f^{(p)}(a) + \ldots \tag{147}$$

Gdy szereg Taylora'a piszemy w postaci (146) to

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(a+\theta x);$$

dla postaci (145) reszta

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(\theta x);$$

dla postaci (147),

$$R_n = \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}\{a+\theta(x+a)\}.$$

Trzeba pamiętać, że te wyrażenia R_n oznaczają nie resztę szeregu w tem znaczeniu, jakie nadaliśmy temu wyrażeniu w teorji szeregów (l. 47), ale resztę w twierdzeniu Taylor'a (l. 104). Zaraz zobaczymy, że tu tkwić może pewna różnica.

Przedewszystkiem zauważymy, że rozwinięcie na szereg Taylor'a udowodniliśmy pod warunkiem istnienia pochodnych wszystkich rzędów i dążenia R_n do zera, gdzie R_n oznacza wyrażenie, które zostało określone przy dowodzie wzoru Taylor'a (l. 104); nie należy przypuszczać, że zbieżność szeregu Taylor'a utworzonego przy pomocy pochodnych funkcji $f(x)$, wystarcza do uzasadnienia rozwinięcia na szereg Taylor'a. Może, naprzykład, zdarzyć się, że szereg

$$(148) \quad f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \ldots.$$

jest zbieżny, ale suma jego nie równa się $f(x)$, lecz $\varphi(x)$ przyczem $\varphi(x) \neq f(x)$; stosując twierdzenie Taylor'a w tym przypadku, mielibyśmy

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n$$

i przechodząc do granicy, mielibyśmy

$$f(x) = \varphi(x) + \lim_{n \to \infty} R_n, \text{ czyli } \lim_{n \to \infty} R_n = f(x) - \varphi(x);$$

$\lim R_n$ oznacza tu różnicę między funkcją $f(x)$, a sumą szeregu (148); oznaczmy tę różnicę $f(x) - \varphi(x)$ przez $\psi(x)$, tak, że

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x);$$

ze (148) wynika, że

$$\varphi(0) = f(0),\ \varphi'(0) = f'(0);\ \varphi''(0) = f''(0); \ldots f^{(p)}(0) = \varphi^{(p)}(0),$$

a więc

$$\psi(0)=0,\ \psi'(0)=0,\ \psi''(0)=0,\ldots,\ \psi^{(n)}(0)=0,\ldots$$

Taką funkcją, której pochodne wszystkich rzędów w pewnym punkcie istnieją i równają się zeru, jest, np., funkcja

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}},\ \text{dla } x\neq 0;\ f(0)=0,$$

(patrz l. 107) dla $x=0$.

Jeżeli $\varphi(x)$ jest sumą szeregu (148), i jeżeli teraz chcielibyśmy rozwinąć na szereg Maclaurina, t. j. na szereg według wzoru (145) funkcję $f(x)=\varphi(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}$, to otrzymalibyśmy szereg (148), zbieżny, ten sam, którego sumą jest $\varphi(x)$, ponieważ wszystkie pochodne funkcji $f(x)$ w punkcie $x=0$ są takie same, jak pochodne funkcji $\varphi(x)$; o tem, że nie otrzymaliśmy rozwinięcia funkcji $f(x)$ zostalibyśmy ostrzeżeni przez badanie $R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$; przekonalibyśmy się bowiem, że w tym wypadku reszta zmierza nie do zera, lecz właśnie do $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Przy rozwijaniu funkcji na szereg potęgowy należy z jednej strony otrzymać wartość pochodnej n^{go} rzędu funkcji, z drugiej zaś strony udowodnić, że reszta dąży do zera. Zauważymy, że istnieje cała klasa funkcyj, dla których odrazu twierdzić możemy, że R_n dąży do zera, gdy $n\to\infty$; mianowicie, gdy pochodne kolejne tworzą ciąg ograniczony w odpowiednim przedziale.

W przypadku, np. wzoru (145) Maclaurina wystarczy widzieć, że

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ldots,\ f^{(n)}(x),\ldots$$

stanowi ciąg funkcyj ograniczony w przedziale $(-\alpha, +\alpha)$, t. j. że istnieje liczba M, niezależna od n i od x, byle tylko zmienna x należała do przedziału $(-\alpha, \alpha)$, taka że

$$|f^{(n)}(x)|<M;$$

wtedy $\lim R_n = 0$; w rzeczy samej $R_n = \frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(\theta x)$, lecz $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, jak wiemy; a więc $\lim R_n = 0$.

Uwagę tę możemy z korzyścią zastosować przy rozwinięciu na szereg funkcyj e^x, $\sin x$, $\cos x$ i t. p.

122. *Przykłady: rozwinięcie na szereg funkcyj e^x, $\sin x$ i $\cos x$.*

Niech $f(x) = e^x$; ponieważ $f^{(n)}(x) = f(x)$; $|f^{(n)}(x)| < M$, w przedziale $(-\alpha, \alpha)$, o ile $M > e^\alpha$, gdzie α jest dowolną liczbą dodatnią. Stąd wniosek, na podstawie uwagi z końca poprzedniego rozdziału, że $R_n \to 0$, gdy $n \to \infty$ i otrzymujemy rozwinięcie

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

Niech $f(x) = a^x = e^{kx}$, gdzie $k = \lg_e a$;

$$a^x = 1 + \frac{x \lg a}{1} + \frac{x^2 \lg^2 a}{2!} + \frac{x^3 \lg^3 a}{3!} + \ldots + \frac{x^n \lg^n a}{n!}$$

Niech $f(x) = \sin x$;

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$; a więc tu $|f^{(n)}(x)| < M$, o ile tylko $M > 1$; stąd $R_n \to 0$; $f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi}{2} n$.

A więc

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots;$$

wyrazem ogólnym jest

$$\frac{x^n}{n!} \sin n \frac{\pi}{2}.$$

Niech $f(x) = \cos x$;

$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$; a więc tu $|f^{(n)}(x)| < M$, o ile tylko $M > 1$: stąd $R_n \to 0$; $f^{(n)}(0) = \cos n \frac{\pi}{2}$.

$$\cos = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots;$$

wyraz ogólny $\frac{x^n}{n!} \cos n \frac{\pi}{2}$.

Uwaga. Otrzymane szeregi są zbieżne dla każdej wartości zmiennej x, a więc jednostajnie zbieżne w każdym przedziale skończonym (m, n).

Stąd wniosek, że można przyjąć te szeregi, jako najdogodniejsze określenia naszych funkcyj. Z tych szeregów łatwo otrzymać odnośne dla nich własności.

Oznaczmy przez $\varphi(x)$ sumę szeregu następującego:

(149) $$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^p}{p!} + \ldots$$

wtedy

$$\varphi(y) = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots + \frac{y^p}{p!} + \ldots;$$

ponieważ te dwa szeregi są bezwzględnie zbieżne dla każdej pary wartości zmiennych x i y, więc iloczyn

$$\varphi(x) . \varphi(y) = 1 + \frac{(x+y)}{1!} + \frac{x^2 + 2x + y^2}{2!} + \\ + \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{3!} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{p!}\left(x^p + p\,x^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2!}x^{p-2}y + \ldots + p\,x\,y^{p-1} + y^p\right) + \ldots$$

czyli

$$\varphi(x) . \varphi(y) = 1 + \frac{1}{1}(x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \ldots\ldots \\ \ldots + \frac{1}{p}(x+y)^p + \ldots,$$

czyli $$\varphi(x) . \varphi(y) = \varphi(x+y).$$

Utwórzmy teraz pochodną funkcji $\varphi(x)$; na mocy twierdzenia l. 120 mamy

$$\varphi'(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} + \ldots = \varphi(x)$$

Udowodnimy teraz, że warunki

$$\varphi'(x) = \varphi(x) \text{ i } \varphi(0) = 1,$$

wyznaczają funkcję jednoznacznie. Niech $\psi(x)$ oznacza inną funkcję, spełniającą te same warunki. Utwórzmy pochodną ilorazu $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$; otrzymamy

$$\left\{\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right\}' = \frac{-\varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)} = 0, \text{ (o ile } \varphi(x) \neq 0),$$

ponieważ

$$\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x) = \varphi(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi(x) = 0.$$

Stąd wniosek, że $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = C$, (stała), w każdym przedziale, wewnątrz którego $\varphi(x)$ nie równa się zeru; ponieważ $\varphi(0) = 1$, więc na mocy ciągłości funkcji $\varphi(x)$, taki przedział z pewnością istnieje; tak więc w tym przedziale

$$\psi(x) = C \,.\, \varphi(x), \quad \psi'(x) = C\varphi'(x);$$

ponieważ $\qquad \psi'(0) = \varphi'(0) = 1,$

więc $\qquad C = 1$, tak, że $\psi(x) = \varphi(x)$.

Łatwo sprawdzić, że otrzymana równość spełniona jest dla każdej wartości zmiennej x, gdyż funkcja $\varphi(x)$, określona dla każdej wartości x, przez szereg (149) nie staje się równą zeru dla żadnej wartości zmiennej; gdy $x > 0$, jest to oczywiste z samego szeregu (149), w którym każdy wyraz jest dodatni; udowodniliśmy przed chwilą, że $\varphi(x+y) = \varphi(x) \,.\, \varphi(y)$; jeżeli $x + y = 0$, to $\varphi(x) \,.\, \varphi(-x) = \varphi(0) = 1$, czyli $\varphi(x) = \frac{1}{\varphi(-x)}$; jeżeli $x < 0$, to $-x > 0$ i $\varphi(x) = \frac{1}{\varphi(-x)} > 0$.

Widzimy więc, że, wychodząc z szeregu (149), które przyjmujemy za określenie funkcji, możemy otrzymać

własności tej funkcji i utożsamić z funkcją e^x, którą określiliśmy poprzednio (l. 77) zapomocą żmudnego stopniowego uogólniania, przechodząc od wykładnika całkowitego do ułamkowego, a następnie niewymiernego.

W ten sam sposób możemy postąpić, dla określenia funkcyj trygonometrycznych $\sin x$ i $\cos x$. Tem bardziej jest to potrzebne, że dotychczas operowaliśmy temi funkcjami, nie dając w toku tej pracy określenia funkcyj trygonometrycznych, lecz opieraliśmy się tylko na wiadomościach, zaczerpniętych z matematyki elementarnej. Dla ścisłości całego wykładu musimy teraz uzupełnić tę lukę; w tym celu wprowadzimy dwie funkcje $\psi_1(x)$ i $\psi_2(x)$, określone zapomocą odpowiednich szeregów potęgowych i wyprowadzimy szereg własności tych funkcyj; nareszcie okażemy, że pewna grupa tych własności stanowi cechy, charakterystyczne dla tych funkcyj, czyli wyznacza je jednoznacznie.

Niech więc

(150) $$\psi_1(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots;$$

$$\psi_2(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

Funkcje te są przez te szeregi określone dla każdej wartości zmiennej x; $\psi_1(-x)=-\psi_1(x)$; $\psi_2(-x)=\psi_2(x)$, czyli funkcja $\psi_1(x)$ spełnia warunek $f(-x)=-f(x)$, taka funkcja nazywa się nieparzystą; funkcja $\psi_2(x)$ natomiast spełnia warunek $f(-x)=f(x)$, taka funkcja nazywa się parzystą.

Przejdźmy do pochodnych tych funkcyj

(151) $$\psi'_1(x)=\psi_2(x);\quad \psi'_2(x)=-\psi_2(x),$$

jak to widać odrazu, różniczkując odpowiednie szeregi wyraz po wyrazie. Zauważymy teraz, że warunki, wyrażone równaniami (151) wyznaczają funkcje $\psi_1(x)$ i $\psi_2(x)$ jednoznacznie, o ile jeszcze wyznaczymy wartość tych funkcyj

w punkcie $x=0$, t. j. $\psi_1(0)=\alpha$, $\psi_2(0)=\beta$. Oczywiście, zakładamy ciągłość i istnienie pochodnych.

Przypuśćmy, że funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ spełniają te same warunki, które założyliśmy co do $\psi_1(x)$ i $\psi_2(x)$; utwórzmy funkcję $F(x)=\{\varphi_1(x)-\psi_1(x)\}^2+\{\varphi_2(x)-\psi_2(x)\}^2$; $F'(x)=$ $=2(\varphi_1-\psi_1)(\varphi_2-\psi_2)-2(\varphi_2-\psi_2)(\varphi_1-\psi_1)=0$; stąd (l. 102 wniosek III), $F(x)=C$ (stała); by znaleźć wartość tej stałej, uczyńmy $x=0$;

$F(0)=\{\varphi_1(0)-\psi_1(0)\}^2+\{\varphi_2(0)-\psi_2(0)\}^2=(\alpha-\alpha)^2+(\beta-\beta)^2=0$;

tak więc $C=0$; $(\varphi_1-\psi_1)^2+(\varphi_2-\psi_2)^2=0$;

stąd ostatecznie $\varphi_1=\psi_1$; $\varphi_2=\psi_2$, co trzeba było okazać.

Utwórzmy funkcje:

$$\Phi_1(x)=\psi_2(a).\psi_2(x)-\psi_1(a).\psi_1(x) \text{ i}$$
$$\Phi_2(x)=\psi_1(a).\psi_2(x)+\psi_2(a).\psi_1(x);$$

obliczmy pochodne tych funkcyj; na mocy (151) mamy

$$\Phi'_1(x)=-\{\psi_2(a)\psi_1(x)+\psi_1(a).\psi_2(x)\}=-\Phi_2(x);$$
$$\Phi_2(x)=\psi_2(a)\psi_2(x)-\psi_1(a).\psi_1(x)=\Phi_1(x);$$

oprócz tego

$$\Phi_1(0)=\psi_2(a).\psi_2(0)-\psi_1(a).\psi_1(0),$$
$$\Phi_2(0)=\psi_1(a).\psi_2(0)-\psi_2(a).\psi_1(0);$$

przyjmijmy teraz, że funkcje $\psi_1(x)$ i $\psi_2(x)$ są to właśnie funkcje, określone przez szeregi (150); wtedy $\psi_1(0)=0$, $\psi_2(0)=1$; w takim razie

$$\Phi_1(0)=\psi_2(a);\ \Phi_2(0)=\psi_1(a).$$

Funkcje $\Phi_1(x)$ i $\Phi_2(x)$ spełniają warunki (151), wyrażające, że pochodna jednej z nich równa się drugiej funkcji, a pochodna drugiej równa się pierwszej ze zmianą znaku; oprócz tego $\alpha=\psi_1(a)$, $\beta=\psi_2(a)$, gdzie α i β są to wartości w punkcie $x=0$ funkcji $\Phi_2(x)$ i $\Phi_1(x)$. Te warunki, wyznaczają, jak udowodniliśmy, owe funkcje jednoznacznie. Ale łatwo sprawdzić, że funkcje $\psi_1(a+x)$ i $\psi_2(a+x)$, spełniają te same warunki, bo dla $x=0$ dają wartości

$\psi_1(a)$ i $\psi_2(a)$, a oprócz tego pochodna funkcji $\psi_1(a+x)$ równa się $\psi_2(a+x)$, a pochodna funkcji $\psi_2(a+x)$ równa się $-\psi_1(a+x)$.

Stąd wniosek, że $\Phi_2(x)=\psi_1(a+x)$; $\Phi_1(x)=\psi_2(a+x)$, czyli

$$(152)\qquad \begin{aligned} \psi_1(a+x) &= \psi_1(a).\psi_2(x)+\psi_2(a).\psi_1(x), \\ \psi_2(a+x) &= \psi_2(a)\psi_2(x)-\psi_1(a).\psi_1(x); \end{aligned}$$

Są to wzory na dodawanie dla funkcyj $\psi_1(x)$ i $\psi_2(x)$ Kładąc $a=-x$ w drugim z tych wzorów, otrzymamy

$$\{\psi_1(x)\}^2+\{\psi_2(x)\}^2=1.$$

Możemy teraz określić liczbę π analitycznie, bez pomocy koła, jako równą podwojonemu najmniejszemu pierwiastkowi dodatniemu równania $\psi_2(x)=0$.

Ten najmniejszy pierwiastek dodatni równania $\psi_2(x)=0$ istnieje i jest mniejszy od dwóch. Że funkcja $\psi_2(x)$ staje się równą zeru dla pewnej wartości $x=x_0$, zawartej między jednością, a liczbą 2 wynika z ciągłości i z tego, że $\psi_2(1)>0$, a $\psi_2(2)<0$; w rzeczy samej

$$1-\psi_2(1)=+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{2^2}{3.4}\right)+\frac{2^2}{6!}\left(1-\frac{2^2}{7.8}\right)+\dots$$

$$\psi_2(2)-1=-\frac{2^2}{2!}\left(1-\frac{2^2}{3.4}\right)-\frac{2^2}{6!}\left(1-\frac{2^2}{7.8}\right)-\frac{2^2}{10!}\left(1-\frac{2^2}{11.12}\right)-\dots;$$

tak, że $\qquad \psi_2(x_0)=0,\ 1<x_0<2;$

ten pierwiastek x_0 jest najmniejszym z pierwiastków dodatnich, gdyby bowiem istniał pierwiastek x_1 taki, że

$$0<x_1<x_0, \text{ to z } \psi_2(x_0)=\psi_2(x_1)$$

i z twierdzenia Rolle'a wynikałoby, że istnieje wartość pośrednia ξ, przyczem $x_1<\xi<x_2<2$, taka, że $\psi'_2(\xi)=0$, czyli, na mocy (151), $\psi'_1(\xi)=0$, ale jest to niemożliwe, bo

$$\psi_1(x)=x\left(1-\frac{x^2}{2.3}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6.7}\right)+\frac{x^9}{9!}\left(1-\frac{x^2}{10.11}\right)+\dots$$

skąd, oczywiście, $\psi_1(x)$ nie może się równać zeru dla wartości zmiennej x dodatniej i mniejszej od 2; a właśnie $\xi < 2$. Ten najmniejszy pierwiastek oznaczymy przez $\frac{\pi}{2}$.

Ze wzoru

$$\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x) = 1 \text{ i } \psi_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

wynika $\psi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, gdyż, jak widzieliśmy przed chwilą ta wartość nie może być ujemną, gdyż $x_0 = \frac{\pi}{2} < 2$.

Ze wzorów na dodawanie (152) otrzymujemy, kładąc $a = \frac{\pi}{2}$,

$$\psi_1\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \psi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) . \psi_2(x) + \psi_2\left(\frac{\pi}{2}\right) . \psi_1(x) = \psi_2(x),$$

$$\psi_2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \psi_2\left(\frac{\pi}{2}\right) . \psi_2(x) + \psi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) . \psi_1(x) = -\psi_1(x);$$

z otrzymanych wzorów

$$\psi_1\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \psi_2(x),$$

$$\psi_2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\psi_1(x),$$

kładąc $x = \frac{\pi}{2}$, wyprowadzimy:

$$\psi_1(\pi) = \psi_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\psi_2(\pi) = -\psi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Na tej zasadzie, wzory (152) dają

$$\psi_1(\pi + x) = \psi_1(\pi) . \psi_2(x) + \psi_2(\pi) . \psi_1(x) = -\psi_1(x),$$

$$\psi_2(\pi + x) = \psi_2(\pi) . \psi_2(x) - \psi_1(\pi) . \psi_1(x) = -\psi_2(x);$$

kładąc w tych wzorach $x = \pi$, otrzymamy

$$\psi_1(2\pi) = -\psi_1(\pi) = 0; \quad \psi_2(2\pi) = -\psi_2(\pi) = 1.$$

Stosując jeszcze raz (152) otrzymamy:

$$\psi_1(x+2\pi)=\psi_1(x),$$
$$\psi_2(x+2\pi)=\psi_2(x),$$

czyli wzory, wyrażające okresowość tych funkcyj.

Można było postąpić jeszcze inaczej. Mianowicie przy pomocy twierdzenia o mnożeniu szeregów, można było udowodnić, że

$$2\,.\,\psi_2(x)\,.\,\psi_2(y)=\psi_2(x+y)+\psi_2(x-y),$$

na zasadzie rozwinięcia na szereg, zawartego we wzorze (150). Widzimy więc, że funkcja $\psi_2(x)$ czyni zadość równaniu funkcyjnemu, które badaliśmy poprzednio, patrz l. 80 wzór (17).

Widzieliśmy, że to równanie funkcyjne wyznacza o ile usuniemy rozwiązanie trywialne $f(x)=0$ jedną tylko funkcję $f(x)$, którą nazwaliśmy $\cos x$, o ile mamy daną oprócz równania wartość funkcji $f(x)$ w pewnym (dowolnym, ale $\neq 0$) punkcie, przyczem ta wartość dana jest mniejsza od jedności i o ile założymy, że w przedziale $(0, \alpha)$ funkcja jest stale dodatnia.

123. *Rozwinięcie na szereg funkcji $lg(1+x)$ i funkcji dwumiennej $(1+x)^m$.*

Niech $\quad f(x)=\lg(1+x)$; $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$,

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n};\; f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}.(n-1)!$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^{n-1}.\frac{1}{n}.$$

Szereg Maclaurin'a przyjmuje postać:

$$(153)\; \lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

przytem prawdziwość tego rozwinięcia jest uwarunkowana dążeniem do zera reszty R_n, która tutaj przyjmie kształt:

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(\theta x) = \frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} \cdot (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+\theta x)^n};$$

jeżeli $p = n$, to mamy resztę w postaci Lagrange'a (l. 104),

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n; \quad (0 < \theta < 1);$$

jeżeli $p = 1$, to mamy resztę postaci Cauchy'ego

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{1+\theta x} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

Obie postacie reszty będą nam potrzebne.

W przypadku, gdy $|x| > 1$, jako też w przypadku, gdy $x = -1$, szereg po drugiej stronie wzoru (153) jest rozbieżny, jak to można poznać odrazu przez zastosowanie kryterjum d'Alembert'a w przypadku, gdy $|x| > 1$; dla $x = -1$, mamy szereg harmoniczny, rozbieżny (l. 46).

Pozostaje do zbadania przypadek, gdy $|x| < 1$, i gdy $x = +1$.

Przypuśćmy najprzód, że $0 < x \leqslant 1$. Przedstawiwszy resztę w postaci Lagrange'a, widzimy, że $\dfrac{x}{1+\theta x}$ jest dla $0 < x \leqslant 1$ liczbą mniejszą od jedności, to samo tyczy się $\left(\dfrac{x}{1+\theta x}\right)^n$, i $|R_n| < \dfrac{1}{n}$, skąd $\lim R_n = 0$.

Przypuśćmy teraz, że $-1 < x < 0$; w tym przypadku należy wziąć pod uwagę resztę w postaci Cauchy'go;

$$1 > 1 + \theta x > 1 + x > 0; \quad 0 < 1 - \theta < 1 + x\theta; \quad \frac{1-\theta}{1+x\theta} < 1$$

$$\frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1+x}; \quad |R_n| < \frac{|x^n|}{1+x}; \quad \lim R_n = 0.$$

Łącząc te dwa rozpatrywane przypadki razem, widzimy, że rozwinięcie (154) jest prawdziwe dla $-1 < x \leqslant 1$ i tylko dla tych wartości zmiennej x; dla $x = 1$, otrzymujemy:

$$\lg 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots$$

Wzór ten nie nadaje się do obliczenia lg 2, gdyż dla otrzymania lg 2 z cokolwiek większą dokładnością do $\frac{1}{n}$ musimy obliczyć sumę częściową o takiej liczbie wyrazów, która jest tego samego rzędu, co liczba n. Z tego wzoru (153) możemy otrzymać inne, bardziej przydatne do obliczeń. Niech $|x| < 1$ i zamieńmy w (153) x na $-x$;

$$(154) \qquad \lg(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$$

Odejmując stronami (153) i (154) ze względu na to, że $\lg(1+x) - \lg(1-x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$, otrzymamy

$$(154') \qquad \lg\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right\};$$

podstawmy na miejsce x liczbę $\frac{1}{2n+1}$, (gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$), otrzymamy

$$(155) \qquad \lg(n+1) - \lg n = 2\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\right\};$$

kładąc $n = 1$, otrzymamy:

$$(156) \qquad \lg 2 = \frac{2}{3}\left\{1 + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} + \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \ldots\right\};$$

oznaczmy przez s_p sumę częściową p wyrazów szereg w nawiasie, a przez r_p resztę, tak, iż suma tego szeregu równa się $s_p + r_p$; wtedy

$$r_p = \frac{1}{(2p+1)\,9^p} + \frac{1}{(2p+3)\,9^{p+1}} + \ldots$$
$$< \frac{1}{(2p+1)\,9^p}\left\{1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots\right\},$$

czyli

$$r_p < \frac{1}{(2p+1)8.9^{p-1}};$$

widzimy więc, że obliczając lg 2 przy pomocy wzoru (156) i zastępując sumę tego szeregu przez sumę częściową s_p popełniamy błąd mniejszy od $\frac{2}{3}\frac{1}{(2p+1).8.9^{p-1}} =$

$$= \frac{1}{12(2p+1).9^{p-1}}.$$

Następnie mamy

$$\lg 4 = 2.\lg 2; \quad \lg 5 = 2\lg 2 + \frac{2}{9}\left\{1 + \frac{1}{3.9^2} + \frac{1}{5.9^4} + \ldots\right\};$$

czytelnik z łatwością znajdzie granicę błędu w tym przypadku w zależności od liczby p wyrazów uwzględnionych przy tworzeniu sumy częściowej.

Posługując się wzorem (155) możemy obliczyć tablicę logarytmów naturalnych. Jasna rzecz, że przy tych wyliczaniach, można posługiwać się wielu uproszczeniami i przekształceniami,* o których tu jednak mówić nie możemy, odsyłając do dzieł specjalnych.

Zadanie o wyznaczenie logarytmów przy innej zasadzie niż e nie jest zadaniem istotnie różnem od poprzedniego, wiemy bowiem, że wystarczy wszystkie liczby jednej z tablic pomnożyć przez jeden i ten sam czynnik proporcjonalności, zwany modułem, by otrzymać odpowiednie liczby

---

* Podstawiając we wzorze (154') w miejsce x liczbę $\frac{3}{n^3 - 3n}$, otrzymamy

$$\lg\frac{(n+2)(n-1)^2}{(n-2)(n+1)^2} = \frac{4}{n^3-3n} + \frac{4^2}{3(n^3-3n)^3} + \frac{4^3}{5(n^3-3n)^5} + \ldots,$$

skąd $\lg(n+2) = 2\lg(n+1) - 2\lg(n-1) + \lg(n-2) + \frac{4}{n^3-3n}$; wzór ten bywa używany dla obliczenia logarytmu kolejnych liczb w przypadku, gdy n jest liczbą dostatecznie dużą.

drugiej tablicy; tak, np., chcąc otrzymać logarytmy dziesiętne, należy logarytmy naturalne pomnożyć przez

$$M = \frac{1}{\lg_e 10} = 0{,}43429448\ldots$$

Przejdźmy do rozwinięcia dwumianu; niech

$$f(x) = (1+x)^m;\ f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots$$
$$(m-n+1)(1+x)^{m-n};\ f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1);$$

wskutek tego wzór (145) daje:

$$(157)\ (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,x^3 + \ldots,$$

z zastrzeżeniem, że R_n zmierza do zera.

Zbadamy najpierw przypadek, gdy $|x| < 1$; przedstawmy szereg po stronie drugiej równości (157) w postaci

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_p + \ldots$$

gdzie

$$u_p = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!}x^p$$

$$\frac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = \frac{|m-p|}{p+1};\ m \text{ liczba stała}$$

$\lim\limits_{p\to\infty} \frac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = |x|$; a więc dla $|x| < 1$, szereg (157) jest, na zasadzie kryterjum d'*A*lembert'a, bezwzględnie zbieżny.

Przejdźmy do zbadania reszty; weźmiemy ją w postaci Cauchy'ego

$$R_{n+1} = mx(1+\theta x)^{m-1}\,.\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.\,\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{n!}x^n,$$

gdy $\quad |x| < 1,\ (1+\theta x)^{m-1} < (1+\theta)^{m-1} < M,$

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1,$$

czynnik zaś $\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{n!}x^n$ jest wyrazem ogólnym rozwinięcia $(1+x)^{m-1}$ i jako taki, na zasadzie tylko co zastosowanego kryterjum d'Alembert'a, dla $|x| < 1$ zmie-

rza do zera, gdy $n \to \infty$, jako wyraz ogólny szeregu zbieżnego. Możemy więc R_{n+1} rozpatrywać, jako iloczyn paru czynników, z których ostatni zmierza do zera, a wszystkie inne są ograniczone; w tych warunkach

$$\lim_{n \to \infty} R_{n+1} = 0.$$

Udowodniliśmy więc prawomocność rozwinięcia (157) w przypadku, gdy $|x| < 1$.

Przypadek, gdy $|x| > 1$ nie zabierze wiele czasu, gdyż w tym przypadku szereg po stronie prawej wzoru (157) nie ma sensu, jako rozbieżny; rozbieżność wynika z tego, że $\lim \frac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = |x| > 1$, co na podstawie kryterjum d'Alembert'a dowodzi rozbieżności wzmiankowanego szeregu.

Tak więc, dla $|x| > 1$, o ile m nie jest liczbą całkowitą dodatnią, lub zerem, wzór (157) jest pozbawiony sensu; gdy $m = 0$ wszystkie wyrazy szeregu oprócz pierwszego są równe zeru i formalnie wzór (157) jest wtedy spełniony; coś podobnego ma także miejsce, gdy m jest liczbą całkowitą dodatnią; wtedy szereg się urywa, czyli, zacząwszy od pewnego miejsca, wszystkie wyrazy szeregu są równe zeru, t. j. szereg zamienia się na wielomian, w którym to przypadku wzór (167) jest prawdziwy dla $|x| > 1$.

Pozostaje do zbadania wypadek, gdy

$$x = 1 \text{ i gdy } x = -1.$$

Niech $x = 1$. Bierzemy resztę w postaci Lagrange'a

$$R_p = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p!} \cdot (1+\theta)^{m-p}; \quad (0 < \theta < 1);$$

w tem wyrażeniu m ma wartość stałą, a badamy jak się zachowuje R_p gdy $p \to \infty$. Drugi czynnik $(1+\theta)^{m-p} = \frac{1}{(1+\theta)^{p-m}}$ jest „prawie“ zawsze mniejszy od jedności,

bo wystarczy na to, by $p > m$, czyli zacząwszy od pewnego miejsca; (jeżeli m jest liczbą ujemną, to nawet wszystkie wyrazy będą spełniały ten warunek). Czynnik zaś

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!}$$

zmierza do zera, gdy $m > -1$, nie zmierza zaś do zera, gdy $m \leqslant -1$; aby się o tem przekonać, położmy

(158) $$u_p = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!}$$ i zauważymy, że

$$(-1)^p . u_p = \left(1 - \frac{m+1}{1}\right)\left(1 - \frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1 - \frac{m+1}{p}\right)$$

gdy $m+1 < 0$, to wartość bezwzględna każdego z czynników w u_p jest większa od jedności, bo wtedy

$$|u_p| = \left(1 + \frac{|m+1|}{1}\right)\left(1 + \frac{|m+1|}{2}\right)\cdots\left(1 + \frac{|m+1|}{p}\right)$$

i $|u_{p+1}| > 1 |u_p|$; w tych warunkach, oczywiście u_p nie może zmierzać do zera, gdy $p \to \infty$. Niech teraz $m+1 > 0$; ponieważ wykluczamy przypadek, gdy $m = 0$ lub jest liczbą całkowitą dodatnią, więc żaden z czynników w u_p nie równa się zeru. Niech p_0 oznacza pewien wskaźnik, większy od m, który ustalimy i niech $p > p_0$,

$$\frac{u_{p_0}}{u_p} = \frac{1}{\left(1 - \frac{m+1}{p_0+1}\right)\left(1 - \frac{m+1}{p_0+2}\right)\cdots\left(1 - \frac{m+1}{p}\right)};$$

lecz dla $|\alpha| < 1$, $\dfrac{1}{1-\alpha} > 1 + \alpha$; kładąc kolejno

$$\alpha = \frac{m+1}{p_0+1}, \quad \frac{m+1}{p_0+2}, \ldots, \quad \frac{m+1}{p}$$

i mnożąc stronami otrzymane nierówności, będziemy mieli

$$\frac{u_{p_0}}{u_p} > \left(1 + \frac{m+1}{p_0+1}\right)\left(1 + \frac{m+1}{p_0+2}\right)\cdots\left(1 + \frac{m+1}{p}\right) > 1 +$$
$$+ (s_p - s_{p_0})(m+1),$$

gdzie s_p i s_{p_0} są sumami częściowemi szeregu harmonicznego (l. 46). Niech teraz $p \to \infty$, s_{p_0} ma wartość stałą, jak również $m+1$, które jest >0, $s_p \to +\infty$, ponieważ szereg harmoniczny jest rozbieżny; a więc

$$u_{p_0} \to \infty, \text{ czyli } u_p \to 0.$$

Ponieważ $R_p = u_p \cdot \frac{1}{(1+\theta)^{p-m}}$, więc $\lim R_p = 0$, o ile $m+1>0$; gdy zaś $m+1 \leqslant 0$, R_p nie zmierza do zera.

Tak więc, gdy $x=1$, wzór (157) stosuje się tylko dla $m>-1$.

Przejdźmy do przypadku $x=-1$; wtedy szereg po drugiej stronie wzoru (157) przyjmuje postać

$$1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{2!}-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}+\ldots;$$

w tym przypadku możemy bezpośrednio obliczyć kolejno sumy częściowe tego szeregu

$$s_1=1, \quad s_2=-\frac{m-1}{1}, \quad s_3=\frac{(m-1)(m-2)}{2!},$$

$$s_4=\frac{-(m-1)(m-2)(m-3)}{3!}, \ldots,$$

$$s_{p+1}=(-1)^p \cdot \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}{p!};$$

napiszmy s_{p+1} w postaci:

(159) $$s_{p+1}=(-1)^p . u_p^{(1)},$$

gdzie $u_p^{(1)}$ oznacza to samo wyrażenie, które oznaczyliśmy przez u_p poprzednio (158), z tą tylko różnicą, że należy m zastąpić w u_p przez $m-1$, by otrzymać $u_p^{(1)}$. Widzieliśmy poprzednio, że $u_p \to 0$, gdy $m+1>0$ i tylko wtedy; stąd wniosek, że $u_p^{(1)} \to 0$, gdy $m>0$ i tylko wtedy; na zasadzie (159), $s_{p+1} \to 0$, gdy $m>0$ i tylko wtedy.

Ostateczny wynik jest następujący.

Rozwinięcie dwumianu (157) jest prawdziwe,

gdy $|x| < 1$, dla każdego m;
gdy $x = 1$, tylko dla $m > -1$;
gdy $x = -1$, tylko dla $m > 0$;
gdy $|x| > 1$, nigdy.

124. *Przykłady innych rozwinięć. Obliczanie liczby* π. Niech $f(x) = \operatorname{Arctg} x = y$; obliczmy kolejno pochodne tej funkcji. Najprostszy wzór otrzymamy wtedy, gdy te kolejne pochodne wyrażać będziemy nie wprost w zależności od x, lecz w zależności od y, t. j. wyrażając $f^{(n)}(x)$ jako funkcję złożoną za pośrednictwem $y = f(x)$.

Mamy:

$$y' = \cos^2 y; \quad y'' = -2\cos y \sin y \,.\, y' = \cos^2 y \,.\, \sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''' = 2\cos^3 y \,.\, \sin 3\left(y + \frac{\pi}{2}\right), \ldots;$$

udowodnimy przez indukcję, że

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \,.\, \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Przypuśćmy, że wzór ten jest spełniony dla $n = 1, 2, \ldots k$; udowodnimy, że będzie spełniony i dla $n = k+1$. Różniczkujemy więc $y^{(k)} = (k-1)! \cos^k y \,.\, \sin k\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$ stronami; otrzymamy:

$$y^{(k+1)} = -(k-1)! \,.\, k \cos^{k-1} y \,.\, \sin y \,.\, \cos^2 y \,.\, \sin k\left(y + \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ (k-1)! \cos^k y \,.\, k \,.\, \cos k\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \cos^2 y =$$

$$= k! \cos^{k+1} y \,.\, \left\{ -\sin k\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \sin y + \cos k\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \cos y \right\} =$$

$$= k! \cos^{k+1} y \,.\, \sin\left\{(k+1)\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Wzór $f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$, możemy więc

uważać za udowodniony; ponieważ chodzi o gałąź główną, więc w otrzymanym wzorze $-\frac{\pi}{2} < y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Gdy $x=0$, $y=0$, to $f^{(n)}(x) = (n-1)! \sin n\frac{\pi}{2}$. Otrzymamy rozwinięcie:

(160) $$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots;$$

wyraz ogólny $\frac{x^n}{n} \sin n\frac{\pi}{2}$. Przytem rozwinięcie to jest prawomocne tylko dla tych wartości zmiennej x, dla których R_n zmierza do zera; resztę weźmiemy w postaci Lagrange'a:

$$R_n = \frac{x^n}{n} \cdot \cos^n f(\theta x) . \sin n \left\{ f(\theta x) + \frac{\pi}{2} \right\};$$

więc $$|R_n| \leqslant \frac{|x_n|}{n};$$

stąd $R_n \to 0$ dla $|x| \leqslant 1$.

Gdy $|x| > 1$, to R_n nie zmierza do zera, gdyż czynnik $\frac{x^n}{n}$ co do wartości bezwzględnej rośnie do nieskończoności wraz z n (l. 107), i szereg po stronie drugiej równości (160) jest rozbieżny.

Tak więc rozwinięcie (160) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|x| \leqslant 1$, czyli w przedziale właściwym $(-1, 1)$. Czyniąc w tym wzorze $x = 1$, otrzymujemy:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Suma takiego szeregu jest (l. 56, uwaga) zawarta między sumą parzystej i sumą nieparzystej liczby wyrazów, t. j. suma częściowa p wyrazów różni się od rzeczywistej sumy szeregu mniej niż wartość bezwzględna wyrazu, zajmującego miejsce $p+1$. Widzimy więc, jak wiele wziąć musimy wyrazów, by otrzymać dokładność pięciu, np., cyfr dziesiętnych.

Zauważymy, że wzór (160) prowadzi do tym prędszych rachunków wartości przybliżonej funkcji, im $|x|$ jest bliższe zera.

Ze wzoru na dodawanie dla funkcyj sinus i cosinus możemy z łatwością otrzymać wzór na dodawanie dla funkcji tangens

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta},$$

przypuśćmy, że

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\ \text{i}\ -\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2};$$

połóżmy $\operatorname{tg}\alpha=u$, $\operatorname{tg}\beta=v$, wtedy wzór na dodawanie da nam

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{u+v}{1-u.v};$$

dalej $\alpha=\operatorname{Arctg}u$, $\beta=\operatorname{Arctg}v$, $\alpha+\beta=\operatorname{Arctg}\frac{u+v}{1-uv}$; otrzymujemy wzór:

$$\text{(161)}\qquad \operatorname{Arctg}u+\operatorname{Arctg}v=\operatorname{Arctg}\frac{u+v}{1-uv};$$

przypuśćmy teraz, że α i β spełniają warunki poprzednie, lecz $\alpha+\beta\to\frac{\pi}{2}$, wtedy $u.v\to 1$, przyczem $u>0$, $v>0$ i wzór poprzedni przejdzie na

$$\operatorname{Arctg}u+\operatorname{Arctg}v=\frac{\pi}{2};$$

jeżeli teraz $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$, to $uv>1$, $(u>0,\ v>0)$,

$$\operatorname{Arctg}u+\operatorname{Arctg}v=\operatorname{Arctg}\frac{u+v}{1-uv}+\frac{\pi}{2}.$$

Jeżeli $\alpha+\beta\to-\frac{\pi}{2}$, wtedy $uv\to 1$, przyczem $u<0$,

i $v<0$ i $\operatorname{Arctg}u+\operatorname{Arctg}v=-\frac{\pi}{2}$;

jeżeli wreszcie $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, to $uv>1$ $(u<0,\ v<0)$, i

$$\operatorname{Arctg} u+\operatorname{Arctg} v=\operatorname{Arctg}\frac{u+v}{1-uv}-\frac{\pi}{2}.$$

Zastosujmy wzór (161) do obliczenia liczby π; kładąc $\frac{u+v}{1-uv}=1$, $u+v=1-uv$, $u+uv=1-v$; $u=\frac{1-v}{1+v}$; otrzymamy $\operatorname{Arctg} u+\operatorname{Arctg} v=\operatorname{Arctg} 1=\frac{\pi}{4}$; jeżeli $v=\frac{1}{2}$, to $u=\frac{1-v}{1+v}=\frac{1}{3}$ i

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{Arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{2},$$

czyli

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3 \cdot 3}+\frac{1}{2^5 \cdot 5}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3 \cdot 3^3}+\frac{1}{5 \cdot 3^5}-\cdots\right).$$

Możemy rozdrabniać dalej, np.,

$$\operatorname{Arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{7}=\operatorname{Arctg}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{3 \cdot 7}}=\operatorname{Arctg}\frac{1}{2},$$

skąd

$$\frac{\pi}{4}=2\operatorname{Arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{Arctg}\frac{1}{7} \text{ i}$$

$$\frac{\pi}{4}=2\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3 \cdot 3^3}+\frac{1}{5 \cdot 3^5}-\cdots\right\}+\left\{\frac{1}{7}-\frac{1}{3 \cdot 7^3}+\frac{1}{5 \cdot 7^5}-\cdots\right\}.$$

Wskażemy jeszcze następujący sposób, podany przez Machin'a, który pozwala obliczyć liczbę π zapomocą bardzo szybko zbieżnych szeregów.

Niech $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} 4\alpha=\frac{120}{119}=1+\frac{1}{119}$; $\beta=4\alpha-\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg} 4\alpha-1}{\operatorname{tg} 4\alpha+1}=\frac{1}{239}$; a więc

$$\frac{\pi}{4}=4\alpha-\beta=4\,\mathrm{Arctg}\frac{1}{5}-\mathrm{Arctg}\frac{1}{239}, \text{ czyli}$$

$$\pi=\frac{16}{5}\left\{1-\frac{4}{3.100}+\frac{4^2}{5.100^2}-\frac{4^3}{7.100^3}+\ldots\right\}$$

$$-\frac{4}{239}\left\{1-\frac{1}{3.57121}+\frac{1}{5.57121^2}-\frac{1}{7.57121^3}+\ldots\right\};$$

przy pomocy tego wzoru obliczono liczbę π z dokładnością przeszło 700 cyfr dziesiętnych.

Wierszyk francuski:

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile
[aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur!
Pour moi ton problème est de pareils avantages.

Zastępując każde słowo tego wiersza liczbą liter weń wchodzących, otrzymamy:

$\pi=3{,}141592653589793238462643383279\ldots\ldots$

z dokładnością 30 cyfr dziesiętnych.

Rozwinięcie tego i poprzedniego rozdziału można było otrzymać drogą daleko krótszą przy pomocy twierdzenia udowodnionego poprzednio (l. 118). Mianowicie, funkcja wyrażona szeregiem:

$$u'_1(x)+u'_2(x)+u'_3(x)+\ldots+u'_p(x)+\ldots$$

jest pochodną funkcji, wyrażonej przez szereg:

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_p(x)+\ldots,$$

w przedziale (m, n), gdy w tym przedziale pierwszy szereg jest jednostajnie zbieżny.

Jeżeli $u_n(x)=\frac{x^n}{n}\cdot(-1)^{n+1}$, to $u'_n(x)=(-1)^{n-1}.x^{n-1}$.

A więc funkcja $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$, suma szeregu pochodnych jest pochodną funkcji:

$$s(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

$$\text{czyli}\quad s'(x)=\frac{1}{1+x};$$

stąd wynika, że pochodną funkcji $f(x)=s(x)-\lg(1+x)$ jest zero, gdyż pochodną $\lg(1+x)$ jest także $\frac{1}{1+x}$; a więc (l. 102, uwaga III-cia), $f(x)=C$ (stała) i $s(x)=\lg(1+x)+C$; ponieważ $s(0)=0$, bo każdy wyraz szeregu jest wtedy równy zeru, więc $C=0$; otrzymaliśmy:

$$\lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

To rozwinięcie zostało udowodnione (l. 118) dla każdej wartości x, należącej do przedziału, w którym szereg

$$1-x+x^2-x^3+\ldots$$

jest jednostajnie zbieżny, t. j. w przedziale $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$, gdzie $\varepsilon>0$ jest liczbą dowolnie małą. Ten wynik nie jest zupełny, bo jak wiemy z poprzedniego rozdziału rozwinięcie nasze jest słuszne i dla $x=1$, tymczasem punkt $x=1$ nie jest zawarty w przedziale $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$. Zobaczymy w rozdziale następnym, jak można z łatwością ten wynik uzupełnić przy pomocy twierdzenia Abela.

W ten sam sposób z rozwinięcia

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots;$$

możemy otrzymać rozwinięcia funkcji $\operatorname{arctg} x$. W rzeczy samej, niech $u'_n(x)=x^{2(n-1)}.(-1)^{n-1}$, wtedy

$$u_n(x)=\frac{x^{2n-1}}{2n-1}(-1)^{n-1},$$

a więc, kładąc,

$$s(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots,\quad \text{mamy}\quad s'(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

a więc $s(x) = \text{Arctg}\, x + C$; w punkcie $x = 0$, $s(0) = 0$, $\text{Arctg}\, 0 = 0$, więc $C = 0$ i $s(x) = \text{Arctg}\, x$, czyli:

$$\text{Arctg}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots,$$

w przedziale $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$, gdzie szereg $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ jest jednostajnie zbieżny. Widzimy, że i ten wynik nie jest zupełny.

Zróbmy jeszcze jedno zastosowanie twierdzenia z l. 118; Niech

$$f(x) = \text{Arc}\sin x;\ f'(x) = (1 - x^2)^{-1/2},$$

czyli

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p}x^{2p} \ldots\ldots$$

kładąc

$$u'_{p+1}(x) = \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p}x^{2p},$$

mamy

$$u_{p+1}(x) = \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p}\cdot\frac{x^{2p+1}}{2p+1}.$$

A więc

$$\text{Arc}\sin x = f(x) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p}\cdot\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \ldots$$

w przedziale $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$, w którym pierwszy szereg, t. j. utworzony z wyrazów pochodnych $u'_p(x)$ jest jednostajnie zbieżny.

Można udowodnić, że otrzymany szereg jest zbieżny dla $x = 1$ i dla $x = -1$. W rzeczy samej, niech $0 < x < 1$; wtedy

$$s_p = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p}\cdot\frac{x^{2p+1}}{2p+1} <$$

$$< \text{Arc}\sin x < \frac{\pi}{2},$$

bo wyrazy szeregu są dodatnie i sumy częściowe $s_p(x)$ dążą do $s(x) = \operatorname{Arc} \sin x$, tworząc ciąg rosnący.

Ponieważ $s_p(x) < \frac{\pi}{2}$ dla każdego $0 < x < 1$, więc musi istnieć granica $s_p(x)$, gdy $x \to 1$, gdyż $s_p(x)$ jest wielo mianem, a więc funkcją ciągłą zmiennej x i

$$s_p(1) = \lim_{x \to 1} s_p(x) \leqslant \frac{\pi}{2};$$

ponieważ $s_1(1)$, $s_2(1)$, $s_3(1) \ldots$, $s_p(1), \ldots$ stanowi ciąg rosnący i ponieważ ciąg ten jest ograniczony od góry. Ponieważ $s_p(1) \leqq \frac{\pi}{2}$ dla każdego p, więc ciąg tych sum częściowych szeregu

$$(162)\quad 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1.3.5 \ldots (2p-1)}{2.4.6 \ldots 2p} \cdot \frac{1}{2p+1} + \ldots$$

jest zbieżny i szereg (162) posiada sumę, t. j. jest zbieżny. Łatwo udowodnić, że ta suma równa się $\frac{\pi}{2}$. My będziemy mogli wysnuć to także z twierdzenia Abela, które teraz udowodnimy.

125. *Twierdzenie Abela. Ciągłość sumy szeregu potęgowego.*

Wróćmy do szeregu potęgowego (137). Udowodniliśmy, że każdy taki szereg posiada promień zbieżności ρ; przypuśćmy, że rozważamy szereg, dla którego ρ jest liczbą skończoną, $\neq 0$. Udowodniliśmy (l. 119), że szereg (137) jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $(-\rho + \varepsilon, \rho - \varepsilon)$, jakkolwiek małą jest liczba dodatnia ε. Ponieważ każdy wyraz szeregu potęgowego (137) jest funkcją ciągłą zmiennej x, więc, na mocy twierdzenia znanego l. 118, suma $s(x)$ wyrazów szeregu (137) jest funkcją ciągłą zmiennej x w przedziale $(-\rho + \varepsilon, \rho - \varepsilon)$, w każdym punkcie x tego przedziału; czyli

$$\lim_{x \to a} s(x) = s(a),$$

o ile a jest punktem wewnętrznym przedziału $(-\rho, \rho)$. Twierdzenie Abela uzupełnia nasze wiadomości co do ciągłości sumy $s(x)$ w punktach krańcowych przedziału $(-\rho, \rho)$.

Twierdzenie Abela wygłosimy dla $x=\rho$; dla $x=-\rho$ mamy to samo.

Przypuśćmy, że szereg (137) jest zbieżny także w punkcie $x=\rho$ i oznaczmy przez $s(\rho)$ sumę tego szeregu (137) w punkcie $x=\rho$.

Twierdzenie Abela polega na tem, że $s(\rho)$ jest granicą, do której dąży suma $s(x)$ szeregu, gdy x zmierza do ρ, t. j.

$$\lim_{x \to \rho} s(x) = s(\rho)$$

Ponieważ na mocy założenia szereg

$$a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + a_3 \rho^3 + \ldots + a_n \rho^n + \ldots$$

jest zbieżny, można znaleźć taki wskaźnik n_0, że

$$|a_n \rho^n + a_{n+1} \rho^{n+1} + \ldots + a_{n+p} \rho^{n+p}| < \tfrac{1}{3} \varepsilon.$$

dla $n > n_0$ i dowolnego $p > 0$, (l. 47).

Niech $x = \theta . \rho$; gdy $x \to \rho$, $\theta \to 1$, $\theta < 1$,

$$\begin{aligned} s(\rho) - s(x) = s(\rho) - s(\theta\rho) = \{a_1 \rho (1-\theta) + a_2 \rho^2 (1-\theta^2) + \\ + a_3 \rho^3 (1-\theta^3) + \ldots + a_n \rho^n (1-\theta^n)\} + \\ + \{a_{n+1} \rho^{n+1} + a_{n+2} \rho^{n+2} + \ldots\} + \{a_{n+1} \rho^{n+1} \theta^{n+1} + \\ + a_{n+2} \rho^{n+2} \theta^{n+2} + \ldots\}, \end{aligned}$$

czyli

$$s(\rho) - s(\theta\rho) = U_1 + U_2 + U_3$$

$$|U_2| = |a_{n+1} \rho^{n+1} + a_{n+2} \rho^{n+2} + \ldots| < \tfrac{1}{3} \varepsilon,$$

ponieważ liczba n została ustalona $> n_0$.

Udowodnijmy teraz, że i $|U_3| \leqq \frac{1}{3} \varepsilon$. W tym celu przypomnijmy sobie twierdzenie pomocnicze Abela, udowodnione poprzednio l. 56.

(163) $$|a_{n+1} \rho^{n+1} \theta^{n+1} + a_{n+2} \rho^{n+2} \theta^{n+2} + \ldots + a_{n+p} \rho^{n+p} \theta^{n+p}| < \\ < \theta^{n+1} \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3},$$

ponieważ liczby $\theta^{n+1}, \theta^{n+2}, \dots \theta^{n+p}$, tworzą ciąg malejący, a

$$|a_{n+1}\rho^{n+1}| < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \ |a_{n+1}\rho^{n+1} + a_{n+2}\rho^{n+2}| < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \dots$$
$$|a_{n+1}\rho^{n+1} + a_{n+2}\rho^{n+2} + \dots + a_{n+p}\rho^{n+p}| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

Ponieważ nierówność (163) zachodzi przy dowolnem p, więc, przechodząc do granicy dla $p \to \infty$, otrzymamy:

$$|U_3| \leqq \tfrac{1}{3}\varepsilon, \ (\theta < 1);$$

U_1 jest wielomianem stopnia n względem θ, który dla $\theta - 1$ przyjmuje wartość zero; ponieważ U_1, jako wielomian, jest funkcją ciągłą zmiennej θ, więc

$$\lim_{\theta \to 1} U_1(\theta) = 0;$$

do $\varepsilon > 0$, można więc dobrać taką liczbę η, że

$$1 - \eta < \theta \leqslant 1$$

pociąga

$$|U_1| < \tfrac{1}{3}\varepsilon;$$
$$|s(\rho) - s(x)| \leqslant |U_1| + |U_2| + |U_3|,$$

a więc

$$|s(\rho) - s(x)| < \varepsilon, \text{ byle tylko } 1 - \eta < \frac{x}{\rho} < 1,$$

czyli

$$(1 - \eta) < x < \rho.$$

Stąd wniosek, że $\lim\limits_{x \to \rho} s(x) = s(\rho)$, o ile szereg jest zbieżny w punkcie $x = \rho$. Tak samo $\lim\limits_{x \to -\rho} s(x) = s(-\rho)$, o ile szereg jest zbieżny w punkcie $x = -\rho$.

Zastosowania. Ponieważ szereg $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$; jest zbieżny dla $x = 1$ (l. 56), ponieważ w przedziale $(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$ sumą $s(x)$ tego szeregu jest $\lg(1 + x)$, więc, na mocy twierdzenia Abela

$$\lim_{x \to 1} \lg(1 + x) = s(1) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \dots;$$

lecz

$$\lim_{x \to 1} \lg(1 + x) = \lg 2, \text{ (ciągłość); więc}$$

$$\lg 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \dots$$

Ponieważ szereg $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots.$ jest zbieżny dla $x=1$, i ponieważ w $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ sumą $s(x)$ tego szeregu jest $\operatorname{Arctg} x$, więc, na mocy twierdzenia Abela

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{x\to 1}\operatorname{Arctg} x=1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\ldots$$

Ponieważ szereg $\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots$ jest zbieżny dla $x=1$ i ponieważ w $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ sumą $s(x)$ tego szeregu jest $\operatorname{Arc\,sin} x$, więc, na mocy twierdzenia Abela

$$\frac{\pi}{2}=\lim \operatorname{Arc\,sin} x=1+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,5}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7}+\ldots.$$

Twierdzenie Abela wyraża bardzo ważną własność szeregów potęgowych. Mianowicie chodzi tu o prawomocność zmiany porządku dwóch kolejnych przejść do granicy

$$\lim_{x\to\rho}\left\{\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{x\to\rho} s_n(x)\right\},$$

czyli chodzi o równość dwóch granic

$$\lim_{x\to\rho}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_px^p+\ldots) \text{ i}$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_0+a_1\rho+a_2\rho^2+\ldots);$$

mianowicie twierdzenie Abela polega na tem, że z istnienia drugiej z tych granic wynika istnienie pierwszej. Łatwo dać przykład szeregów nie potęgowych, dla których obie wymienione granice istnieją, ale nie są równe; niech, np., $s_n(x)=x^{n+1}-x$; tak, iż $u_1=x^2-x$, $u_2=x^3-x^2,\ldots.$

$$\ldots u_p=x^{p+1}-x^p;$$

niech $\rho=1$, $s(x)=\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1}-x=-x$;

$\lim\limits_{x\to 1} s(x)=-\lim\limits_{x\to 1} x=-1$; $u_1(1)=0$, $u_2(1)=0,\ldots, u_p(1)=0$;

stąd $s_n(1)=0$ i $\lim s_n(1)=0$;

a więc w tym przykładzie

$$\lim_{x\to 1}\left\{\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right\}\neq\lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{x\to 1} s_n(x)\right\}.$$

126. *Dzielenie szeregów.*

Przypuśćmy, że promień zbieżności ρ szeregu potęgowego

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_2 x^3 + \ldots + a_p x^p + \ldots$$

nie równa się zeru.

Udowodnimy, że istnieje szereg potęgowy i tylko jeden

$$1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p + \ldots,$$

który równa się $\dfrac{1}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_p x^p + \ldots}$

w pewnym przedziale $(-\eta, \eta)$.

Przypuśćmy, że taki szereg istnieje i spróbujmy obliczyć nieznane spółczynniki $b_1, b_2, \ldots, b_p, \ldots$ tego szeregu w zależności od spółczynników znanych $a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots$ szeregu danego metodą spółczynników nieoznaczonych

$$(1 + a_1 x + a_2 x + \ldots + a_p x^p + \ldots)(1 + b_1 x + b_2 x + \ldots + b_q x^q + \ldots) =$$
$$= 1 + (a_1 + b_1) x + (a_2 + a_1 b_1 + b_2) x^2 + \ldots$$
$$+ (a_m + a_{m-1} b_1 + a_{m-2} b_2 + \ldots + a_1 b_{m-1} + b_m) x^m + \ldots$$

Chcemy wyznaczyć spółczynniki $b_1, b_2, \ldots, b_p, \ldots$ tak, by iloczyn $= 1$. Stąd

$$a_1 + b_1 = 0,$$
$$a_2 + a_1 b_1 + b_2 = 0,$$
$$a_3 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + b_3 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_p + a_{p-1} b_1 + a_{p-2} b_2 + \ldots + b_p = 0;$$

z pierwszego równania wyznaczamy b_1; z drugiego b_2, uwzględniając wartość znalezioną na b_1; z trzeciego znajdujemy b_3, uwzględniając wartości znalezione na b_1 i b_2 w zależności od a_1 i a_2; w ten sposób postępując możemy kolejno wyznaczyć każdy spółczynnik b_p w zależności od $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Teraz trzeba udowodnić, że szereg

$$1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p + \ldots$$

którego spółczynniki są liczbami wyliczonemi przed chwilą, jest zbieżny. W tym celu zauważymy, że

$$|b_1| = |a_1|,$$
$$|b_2| \leqslant |a_2| + |a_1| \cdot |b_1|$$
$$|b_3| \leqslant |a_3| + |a_2| \cdot |b_1| + |b_2| \cdot |a_1|$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|b_p| \leqslant |a_p| + |a_{p-1}| \cdot b_1| + \ldots + |a_1| \cdot |b_{p-1}|$$

Mnożymy te równania kolejno przez $r, r^2, r^3, \ldots r^p$ i dodajemy stronami. Otrzymamy

$$|b_1| \cdot r + |b_2| \cdot r^2 + |b_3| \cdot r^3 + \ldots + |b_p| \cdot r^p < |a_1| r + |a_2| r^2 + \ldots$$
$$\ldots + |a_p| \cdot r^p + |b_1| r \{|a_1| \cdot r + |a_2| r^2 + \ldots + |a_{p-1}| r^{p-1}\} +$$
$$+ |b_2| r^2 . \{|a_1| r + |a_2| . r^2 + \ldots + |a_{p-2}| r^{p-2}\} + \ldots + |b_{p-1}| r^{p-1} . |a_1| . r;$$

a więc tem bardziej

$$(164) \quad \begin{aligned} &|b_1| . r + |b_2| r^2 + \ldots + |b_p| . r^p < |a_1| . r + |a_2 r^2 + \ldots + |a_p| . r^p + \\ &+ \{|a_1| . r + |a_2| . r^2 + \ldots + |a_p| . r^p\} . \{|b_1| . r + |b_2| . r^2 + \ldots \\ &\ldots |b_p| . r^p\}. \end{aligned}$$

Oznaczmy dla skrócenia przez $\varphi(r)$ sumę szeregu

$$\varphi(r) = |a_1| . r + |a_2| . r^2 + \ldots + |a_p| . r^p + \ldots,$$

a przez $\varphi_p(r)$ sumę częściową p wyrazów tego szeregu, który jest zbieżny dla $r < \rho$; ponieważ $\rho(0) = 0$, $\lim \varphi(r) = 0$, więc można znaleźć taką liczbę $\eta > 0$, że dla $0 < r \leqslant \eta$, $\varphi(r) < 1$; ponieważ wszystkie wyrazy szeregu są dodatnie, więc $0 < \varphi_p(r) < 1$, dla każdej wartości wskaźnika p.

Wobec tego nierówność (164) możemy napisać tak:

$$|b_1| . r + |b_2| . r^2 + \ldots + |b_p| r^p < a_p(r) + \varphi_p(r) . \{|b_1| . r + $$
$$+ |b_2| . r^2 + \ldots + |b_p| r^p\},$$

czyli

$$\{|b_1| . r + |b_2| r^2 + \ldots + |b_p| r^p\} \{1 - \varphi_p(r)\} < \varphi_p(r),$$

czyli

$$(165) \quad |b_1| . r + |b_1| r^2 + \ldots + |b_p| r^p < \frac{\varphi(r)}{1 - \varphi_p(r)} < \frac{\varphi(r)}{1 - \varphi(r)};$$

ponieważ $1 - \varphi_p(r) > 0$, $(r \leqslant \eta)$ i $\varphi_p(r) < \varphi(r)$.

Z nierówności (165) wynika, że szereg

(166) $$1 + |b_1| . r + |b_2| . r^2 + \ldots + |b_p| r^p + \ldots$$

jest zbieżny, dla $r < \eta$.

Lecz szereg (166) jest utworzony z wartości bezwzględnych szeregu

(167) $$1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p . x^p + \ldots$$

Stąd wniosek, że szereg (167) jest jednostajnie i bezwzględnie zbieżny dla $|x| \leqslant \eta$, czyli w przedziale $(-\eta, \eta)$. Jeżeli teraz oznaczymy przez $s(x)$ sumę tego szeregu w $(-\eta, \eta)$, a przez $\sigma(x)$ sumę szeregu

$$\sigma(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + \ldots$$

to na zasadzie twierdzenia o mnożeniu szeregów (I. 57) przekonamy się, że w $(-\eta, \eta)$ iloczyn

$$s(x) . \sigma(x) = 1,$$

biorąc pod uwagę równania, którym czynią zadość spółczynniki $b_1, b_2, \ldots, b_p, \ldots$ szeregu $s(x)$. Szereg $s(x)$ będziemy nazywali ilorazem $\frac{1}{\sigma(x)}$.

Gdyby zamiast szeregu $\sigma(x)$ dany był szereg

$$\sigma_1(x) = a_0 + a_1(x) + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p_p + \ldots,$$

to zauważymy, ze

$$\sigma_1(x) = a_0 \left\{ 1 + \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \ldots + \frac{a_p}{a_0} x^p \ldots \right\}, \quad (a_0 \neq 0)$$

i zadanie sprowadziliśmy do poprzedniego. Jeżeli $a_0 \neq 0$, to $\frac{\sigma_1(x)}{x}$ nie można rozwinąć na szereg potęgowy zbieżny w przedziale zawierającym punkt 0; lecz jeżeli $a_0 = 0$, a $a_1 \neq 0$, to $\frac{\sigma_1(x)}{x}$ można rozwinąć na szereg tego rodzaju.

Udowodnione twierdzenie daje nam możność sprowadzenia dzielenia dwóch szeregów do mnożenia, mianowicie, iloraz dwóch szeregów potęgowych sprowadzimy do ilo-

czynu pierwszego przez jedność podzieloną przez drugi szereg. W ten sposób, np., możemy udowodnić, że funkcja tang (x) może być rozwinięta na szereg potęgowy i możemy kolejno obliczyć spółczynniki tego rozwinięcia; w samej rzeczy

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin x . \frac{1}{\cos(x)}; \quad \frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 \ldots \quad \operatorname{tang} x = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots\right)$$

$$\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \ldots\right) = x + \frac{1}{3} + x^3 + + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$$

Rozwinięcie

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{E_1}{1}x - \frac{E_2}{2!}x^2 - \frac{E_3}{3!}x^3 + \frac{E_4}{4!}x^4 + \frac{E_5}{5!}x^5 - \frac{E_6}{6!}x^6 - \ldots$$

jest z tego względu ciekawe, że spółczynniki tego rozwinięcia są w blizkim związku z tak zwanemi liczbami Eulera $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_p, \ldots$; te liczby ze wskaźnikami nieparzystemi są równe zeru, $E_2 = -1$, $E_4 = 5$, $E_6 = -61$, i t. d., jak to widać z porównania obu szeregów na $\frac{1}{\cos x}$.

Między kolejnemi liczbami Eulera zachodzą związki, przy pomocy których można te liczby z łatwością obliczać; związek można napisać w postaci symbolicznej

$$(E + 1)^p + (E - 1)^p = 0,$$

przyczem w rozwinięciu potęgi dwumianu należy wykładnik potęgi zastąpić wskaźnikiem. W blizkim związku z liczbami Eulera są liczby Bernoulli'ego.

Ćwiczenia i zadania.

1) Zbadać zachowanie się funkcji $y = \frac{a + \sin\frac{1}{x}}{x}$ w oto-

czeniu punktu $x=0$ przy różnych wartościach liczby a.

2) Zbadać $y=\frac{x}{2}+\cos x$ i $y=x(\frac{1}{2}+\cos x)$,

$y=x\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)$, dla wielkich wartości x.

3) Zbadać funkcje określone w sposób następujący:

$a)\ y=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2n-1}};\quad b)\ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2^{n}-1}}$

$c)\ y=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}},\ (n=1,2,3,\ldots),$

$d)\ y=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx+2}{nx^2+1};\quad e)\ y=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\pi x)^{\frac{1}{2n-1}}.$

4) Zbadać zbiór punktów nieciągłości funkcji

$y=\sin\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}.$

5) Zbadać funkcje: $y=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctg} nx;$

$y=f(x)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}\sin\frac{\pi}{2}x+x^2}{x^{2n}+1};\quad y=f(x)=\lim\frac{\sin(n!\,\pi x)}{\sin(n!\,\pi x)}.$

6) Zbadać funkcje: $y=x\lg x;\ y=\frac{1}{x}\lg x;$

$y=\frac{1}{\lg x^2}\sin\frac{1}{x};\ y=\frac{x}{\lg x^2}\sin\frac{1}{x};\ =e^{-x^2}\sin\frac{1}{x};\ y=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x^2}};$

w otoczeniu punktu $x=0$.

7) Zbadać funkcję $y=E\left(\frac{1}{u}\right)$, gdzie $u=E\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$. Jakie są punkty nieciągłości tej funkcji i jak się zachowuje funkcja w otoczeniu tych punktów (lewostronnem i prawostronnem).

Obliczyć pochodne następujących funkcyj:

8) $y=\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$; odpowiedź $y'=2\frac{x-1}{(x+1)^3}$.

9) $y=\frac{1+2x-4x^2}{1-2x+4x^2}$

10) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$; $y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

11) $y=\frac{ax^2+2bx+c}{a_1x^2+2b_1x+c_1}$;

$$y'=2\frac{(ab_1-a_1b)x^2+(ac_1-ca_1)x+bc_1-cb_1}{(a_1x^2+2b_1x+c_1)^2}.$$

12) $y=\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$; $y'=\frac{ab}{(a-bx)\sqrt{a^2-b^2x}}$.

13) $y=\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$; $y'=-\frac{a}{b}\cdot\frac{a+\sqrt{a^2-b^2x^2}}{x^2\sqrt{a^2-b^2x^2}}$.

14) $y=\frac{\sqrt{(x+1)(x+3)^9}}{(x+2)^4}$; $y'=\frac{x^2}{(x+2)^5}\sqrt{\frac{(x+3)^7}{x+1}}$.

15) $y=\sqrt[3]{x^2+a}$; $y'=\frac{2}{3}x(x^2+a)^{-\frac{2}{3}}$.

16) $y=(1-\lg x)$; $y'=-\lg x$.

17) $y=\lg\lg x$; $y'=\frac{1}{x\lg x}$.

18) $y=\lg\frac{x+a}{x-a}$; $y'=\frac{2a}{a^2-x^2}$.

19) $y=\frac{e^x-a}{e^x+a}$: $y'=\frac{2ae^x}{(e^x+a)^2}$.

20) $y=a^x.x^a$; $y'=a^xx^{a-1}(x\lg a+a)$.

21) $y=a^{x^n}$; $y'=nx^{n-1}.a^{x^n}.\lg a$.

22) $y=(x^3-3x^2+6x-6)e^x$; $y'=x^3.e^x$.

23) $y=\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$; $y'=\frac{1}{\cos x}$.

24) $y=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)e^x$; $y'=\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}\right)e^x$.

25) $y=\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{6x}\right)e^x;\ y'=\left(\frac{1}{6x}-\frac{4}{x^5}\right)e^x.$

26) $y=\lg(ae^x+b),\ y'=\frac{ae^x}{ae^x+b}.$

27) $y=\frac{x^3-\frac{96}{25}x+\frac{288}{125}}{(4-5x)^2}+\frac{12}{125}\lg(4-5x);$

$y'=\frac{5x^3}{(5x-4)^3}.$

28) $y=\frac{x^2-2}{3}\sqrt{1+x^2};\ y'=\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}.$

29) $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x+1}}+\lg(\sqrt[4]{x+1});\ y'=\frac{1}{4.\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^2}.$

30) $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\lg\{x+\sqrt{1+x^2}\};$

$y'=\frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}.$

31) $y=\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x;\ y'=\frac{1}{\cos^4 x}.$

32) $y=\lg\sin x;\ y'=\operatorname{cotg}x.$

33) $y=x^{\sin x};\ y'=x^{\sin x}\left\{\frac{\sin x}{x}+\cos x\,.\lg x\right\}.$

34) $y=2x+\sin 2x;\ y'=4\cos^2 x.$

35) $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x;\ y'=\frac{\cos 3x}{\cos^5 x}.$

36) $x=2\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}^4x;\ y'=\frac{\sin 4x}{\cos^6 x}.$

37) $y=\frac{3}{2}x+\sin x\left(\frac{3}{2}\cos x+\cos^3 x\right);\ y'=4\cos^4 x.$

38) $y=\cos\left(\lg x-\frac{\pi}{4}\right);\ y'=\sqrt{2}\cos\lg x.$

39) $y=\frac{4}{7}\sin^7\frac{x}{2}-\frac{8}{9}\sin^9\frac{x}{2};\ y'=\frac{1}{2}\sin^5\frac{x}{2}\sin 2x.$

40) $y=\operatorname{Arc\,tg}\frac{x\sqrt{3}}{x+2};\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2(x^2+x+1)}.$

41) $y = 2\operatorname{Arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$; $y' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$.

42) $y = \operatorname{Arc\,tg}\frac{x}{a} + \lg\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$; $y' = \frac{2\,a\,x^2}{x^4-a^4}$.

43) $y = \operatorname{Arc\,tg} e^x$; $y' = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$.

44) $y = x\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\lg\cos\frac{x}{2}$; $y' = \frac{x}{1+\cos x}$.

45) $y = x\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $y' = \frac{x+\sin x}{1+\cos x}$.

46) $y = \lg\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

$y' = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

47) $x = \operatorname{Arc\,sin}(2x^2-1)$; $y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

48) $y = \operatorname{Arc\,cos}(3x-4x^3)$; $y' = \frac{\pm 3}{\sqrt{1-x^2}}$.

49) $y = \frac{1}{5}\sin^2 x\cos^3 x - \frac{13}{15}\cos^3 x - 3\cos x - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} -$

$- \frac{7}{2}\lg\left(\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right)$; $y' = \frac{\cos^8 x}{\sin^3 x}$.

50) $y = \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{x^3}$; $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x^3}}$.

51) $y = \operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$; $y' = \frac{1}{2}$.

52) $y = \frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + \frac{53}{16}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x-3}{2}$;

$y' = \frac{(5x-8)}{(x^2-6x+13)^2}$.

53) $y = \frac{x(5+3x^2)}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{Arc\,tg} x$; $y' = \frac{1}{(1+x^2)^3}$.

54) $y = 23\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{x-4}{3} + 2\lg(x-2) - \lg(x^2-8x+25)$;

$y' = \frac{13(5x-8)}{(x^2-8x+25)(x-2)}$.

55) $y = \frac{6x^5+25x^3+20x}{(4+3x^2)^2} - \frac{5\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{Arctg}\frac{x}{2}\sqrt{3}$;

$y' = \frac{18x^6}{(4+3x^2)^3}$.

56) $y = \frac{1}{6}\lg\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{12}\lg\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{6}\sqrt{3}\,\mathrm{Arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$;

$y' = \frac{1}{x^6-1}$.

57) $y = \mathrm{Arc\,tg}\frac{a\sin x}{1+a\cos x}$; $y' = \frac{a(a+\cos x)}{1+2a\cos x+a^2}$.

58) $y = \lg\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + 2\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$;

$y' = \frac{8x^2}{\sqrt{2}(x^4+1)}$.

59) $y = \frac{1}{4}\lg(1+x^2+x^4) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{1+2x^2}{\sqrt{3}}$;

$y' = \frac{x}{1+x^2+x^4}$.

60) $y = \lg\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x^2}\sqrt{1+x^2}$; $y' = \frac{2}{x^3\sqrt{1+x^2}}$.

Zbadać przebieg zmienności i wykreślić następujące funkcje:

61) $y = \frac{ax^2+2bx+c}{a_1x^2+2b_1x+c_1}$;

zbadać różne możliwe przypadki zależnie od wartości spółczynników a, b, c, a_1, b_1, c_1,

Przyjmujemy, że $a_1 \neq 0$

$$y-\lambda = \frac{(a-a_1\lambda)x^2+2(b-b_1\lambda)x+c-c_1\lambda}{a_1x^2+2b_1x+c_1};$$

przy $\lambda = \frac{a}{a_1}$, gdy $y - \lambda = y_1$, mamy $\frac{px+q}{x^2+2rx+s}$;

niech $x + r = \xi$

$$y_1 = \frac{px+q}{(x+r)^2+s-r^2} = \frac{A\xi + B}{\xi^2 + B};$$

podstawiamy wreszcie $A\eta = y_1$; wtedy zależność poprzednia przyjmuje kształt: $\eta = \frac{\xi + \alpha}{\xi^2 + \beta}$, o ile $A \neq 0$; o ile zaś $A = 0$, poprzestajemy na zależności $y_1 = \frac{B}{\xi^2 + \beta}$. Przekształcenia $y - \lambda = y_1$ i $x + r = \xi$ odpowiadają geometrycznie równoległemu przesunięciu układu spółrzędnych; przekształcenie zaś $y_1 = A\xi$ odpowiada zmianie skali na osi rzędnych.

Wystarczy więc zbadać wykresy krzywych wyrażonych równaniami kształtu $\eta = \frac{\xi + \alpha}{\xi^2 + \beta}$ i $\xi = \frac{\alpha}{\xi^2 + \beta}$, by wyrobić sobie pojęcie o różnych możliwych rodzajach krzywych, które może wyrażać równanie $y = \frac{ax^2 + 2bx + c}{a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1}$.

Zbadajmy:

$$\eta = \frac{\xi + \alpha}{\xi^2 + \beta}; \text{ pochodna } \eta' = -\frac{(\xi^2 + 2\alpha\xi - \beta)}{(\xi^2 + \beta)^2}.$$

Niech $\beta > 0$; wtedy $-(\xi^2 + 2\alpha\xi - \beta) = -(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)$, gdzie $\xi_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta}$; $\xi_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}$.

Gdy $\xi \to \pm\infty$, to $\eta \to 0$. Pochodna η' jest ujemna dla $\xi < \xi_1$ i dla $\xi > \xi_1$, jest natomiast dodatnia dla $\xi_1 < \xi < \xi_2$. Tak więc oś Ox jest asymptotą krzywej; gdy ξ zmienia się od $-\infty$ do ξ_1 funkcja maleje od zera do minimum, następnie gdy ξ zmienia się od ξ_1 do ξ_2, funkcja η rośnie do maximum, przechodząc przez wartość zero w punkcie $\xi = -\alpha$, położonym między ξ_1 i ξ_2. Wreszcie, gdy zmienna ξ od ξ_2 do $+\infty$, to η maleje do zera.

Jeżeli $\beta < 0$, to krzywa posiada także i asymptoty,

równoległe do osi Oy, mianowicie $x = \sqrt{-\beta}$ i $x = -\sqrt{-\beta}$. Należy rozróżnić następujące możliwości: albo $\alpha^2 + \beta > 0$, albo $\alpha^2 + \beta = 0$, albo wreszcie $\alpha^2 + \beta < 0$.

Niech $\beta < 0$ i $\alpha^2 + \beta > 0$.

Przypuśćmy, że $\alpha > 0$. Wtedy $\alpha > \sqrt{-\beta}$ i $|\xi_2| = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta} < \sqrt{-\beta}$. Gdy ξ zmienia się od $-\infty$ do ξ_1, to η od zera maleje do minimum; następnie, gdy ξ od ξ_1 rośnie do $-\sqrt{-\beta}$, to η od minimum, przechodząc przez zero w punkcie $\xi = -\alpha$, rośnie do $+\infty$; następuje przerwa ciągłości. Gdy ξ rośnie od $-\sqrt{-\beta}$ do ξ_2, to η od $-\infty$ rośnie do maximum; następnie, gdy ξ zmienia się od ξ_1 do $\sqrt{-\beta}$, to η maleje do $-\infty$; następuje znów przerwa ciągłości. Gdy ξ rośnie od $\sqrt{-\beta}$ do $+\infty$, to η od $+\infty$ maleje znowu do zera.

Przypadek, gdy $\alpha < 0$ sprowadza się do poprzedniego przez zmianę ξ na $-\xi$ i η na $-\eta$, (obrót o kąt półpełny).

Niech teraz $\beta < 0$ i $\alpha^2 + \beta < 0$; pochodna η' jest wtedy ujemna, funkcja maleje; w tym przypadku $|\alpha| < \sqrt{-\beta}$ Gdy ξ rośnie od $-\infty$ do ξ_1 funkcja η maleje od zera do $-\infty$, następnie maleje od $+\infty$ do $-\infty$, przechodząc przez wartość zero w punkcie $\xi = -\alpha$; do $-\infty$ dąży gdy zbliżamy się do punktu $\xi = \xi_2$ lewostronnie. Gdy ξ od ξ_2 rośnie do $+\infty$, to η od $+\infty$ maleje do zera.

Przypadki $\alpha^2 + \beta = 0$ i $\beta = 0$, jako też zbadanie krzywej $\eta = \frac{\alpha}{\xi^2 + \beta}$ zostawiamy czytelnikowi.

62) Zbadać przebieg zmienności i wykreślić funkcje:

$$y = x^3 + px^2 + q; \quad y = x^3 + px + q; \quad y = x^5 + px + q;$$
$$y = x^5 + px^3 + q.$$

Zbadać różne możliwe przypadki w zależności od wartości liczb p i q.

63) $y = (3x - 1)^2 (x + 1)^2 (x - 2)^2$.

64) $y = (x-2)^2(x+3)(x-4)$.

65) $y = \frac{3x^2+4}{(x-2)^2(x+1)}$.

66) $y = \frac{x^4-x^2+2}{x^4+x^2+1}$.

67) $y = \frac{\cos 3x}{1+\cos 2x}$.

68) $y = \frac{1+\sin x}{\sin x(1-\sin x)}$.

69) $y = \frac{1+\sin+\sin^2 x}{1+\cos 2x}$.

70) $y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

71) $y = \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2} + \lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

72) $y = \frac{3x-2}{x+1} + \lg x^2$.

73) $y = \frac{x-\sin x}{x^3}$.

74) $y = x^{\lg x^2}$.

75) $y = x \,.\, \lg\frac{1+x}{x}$.

76) $y = \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$.

77) $y = e^{-x^2} \,.\, \sin x$.

78) $y = e^{x^2} \,.\, \sin x$.

79) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$.

80) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

81) $y = \frac{x}{\lg x}$.

82) $y=\frac{\sin^2 mx}{\sin^2 x}$.

83) $y=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} 3x}$.

84) $y=\frac{x^4}{(x-1)(x-3)^3}$.

85) $y=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

86) $y=x \operatorname{Arc}\sin x+\sqrt{1-x^2}$.

87) $y=x \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x-\frac{1}{2}\lg(1+x^2)$.

88) $y=\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{2}-\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)$.

89) $y=\frac{9x+7x^3}{(1+x^2)(9+x^2)}-\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$.

90) $y=\frac{1}{2\cos^2 x}+\lg\cos x$.

91) $y=\frac{2}{x}+\lg x$.

92) $y^3=1-x^2$.

93) $y=\frac{1-x}{x^2}$.

94) $y=\lg\frac{x-1}{x+1}-\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$.

95) $y=\frac{1}{1-x^2}(1+2x \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x)$.

96) $y=(x^2+2x+3)-\frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

97) $y=e^{\frac{1}{\lg x}}$.

98) $y=e^{\frac{2x}{x^2-1}}$.

99) $y=\sin\frac{2x}{x^2-1}$.

100) $y=\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{x+1}{x-1}$.

101) $y = \operatorname{Arc\,tg}(k \sin x)$.

102) $y = \operatorname{Arc\,tg}(k \operatorname{tg} x)$.

103) $y = \operatorname{Arc\,tg}\left(\sin \frac{1}{x}\right)$.

104) $y = \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$.

105) $y = \sin \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$.

106) $y = \frac{1}{x} \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x}$.

107) $y = \operatorname{Arc\,tg} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

108) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

109) $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

110) $y = \lg \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

111) $y = e^{\operatorname{tg} x}$.

112) $y = e^u, \; u = \frac{1}{\lg (x^2 - 1)}$.

113) $y = \sin x \, . \sin \frac{1}{x}$.

114) $y = \frac{x}{\sin x}$.

115) $y = \frac{5 \cos x + 6}{2 \cos x + \sin x + 3}$.

116) $y = \lg (x^2 - 7x + 12)$.

117) $y = \sin \lg x$.

118) $y = \lg \sin x$.

119) $y = \lg \sin \frac{1}{x}$.

120) $y = x \lg x$.

121) $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.

122) $y = e^x + e^{\frac{1}{x}}$.

123) $\lg x \,.\, \lg y = \lg x + \lg y$.

124) $x \,.\, e^{-x} = y \,.\, e^{-y}$.

125) $y = x \,.\, E\left(\frac{1}{x}\right)$. dla $x \neq 0$; $y = 1$, $x = 0$.

126) $2y = x + E\left(\frac{1}{x}\right)$.

127) $y = -E(x) \,.\, \lg 2 + \lg\{1 - \frac{1}{2}\sqrt{x - E(x)}\}$.

128) $y = \frac{1}{x} E(x)$.

129) $y = \frac{1}{x} E\left(\frac{1}{x}\right)$.

130) $y = x \,.\, E(x) - \frac{1}{2}\{E(x) + 1\} E(x)$.

131) $y = x^n \,.\, e^{-x}$.

132) $y = \cos x \,.\, \lg \sin x - \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

133) $y = x \cos \operatorname{tg} x$.

134) $y = x \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

135) $y = \frac{x^2 (e^{1/x} - 1)}{e^{1/x} + 1}$.

136) $y = x^2 \pm x^2 \sqrt{x}$.

137) $y = \frac{1 - x^2}{2 \pm \sqrt{1 - x^2}}$.

138) $y = x^2 \,.\, E(x)$.

139) $y = x^2 \,.\, E\left(\frac{1}{x}\right)$.

140) $y = \operatorname{tg}\left(x + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}\right)$.

141) $y = \mathrm{Arctg}\,\dfrac{2x}{x^2-2}.$

142) $y = x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}.$

143) $y = x - \dfrac{1}{\lg x}.$

144) $y = x - \dfrac{1}{3}\,\mathrm{tang}\,x - \dfrac{2}{3}\sin x.$

145) $y = \mathrm{Arctg}\,x - \dfrac{x}{1+x^2}.$

146) $y = x - k\,.\,\sin x.$

147) $y = \mathrm{Arctg}\,x - k\,.\,x.$

148) $y = e^{x\sqrt{x^2-1}} - k\,.\,(x + \sqrt{x^2-1}).$

149) $y = \mathrm{Arctg}\,x - \dfrac{13x^3+3x}{3x^4+14x^2+3}.$

150) $y = \lg\sin\dfrac{1}{x}.$

151) $y = \lg\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right).$

152) $y = x\,.\,\lg\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right).$

153) $y = \left(\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin 2x}\right)x.$

154) $y = \dfrac{1}{Ch x}\,\dfrac{1}{\cos x}.$

155) $y = \sin\lg\sin x.$

156) $y = \mathrm{Arctg}\lg\sin x.$

157) $y = \sin\sin x.$

158) $y = \lg(\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}).$

159) $y^4 = x^3 - x^4.$

160) $y = \dfrac{1}{v-1} - \dfrac{1}{v^2};\ v = \sin x.$

161) $y^2 = \dfrac{x^2}{(x-1)^2} - x^2.$

162) $y=\sqrt{x(2a-x)}+\sqrt{ax}$.

163) $y^2=(x^2+y^2)x^2$.

164) $y=\sin E(x)$.

165) $y=\frac{1}{\operatorname{Arc}\sin x}$.

166) $y=\operatorname{Arctg} e^{\frac{1}{x}}$.

167) $y=\frac{1}{e^{1/x}-1}-\frac{2}{e^{1/x}-2}$.

168) $y=u-e^u$, gdzie

$$u=\frac{x^2-4}{x^2-3x}.$$

169) Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+Chx-2\cos x\, Chx}{1-\cos x\, Chx}$.

170) Znaleźć $\lim\limits_{a\to 0}\frac{x\cos x+2x-3\sin x}{2x^2\operatorname{cotg}x-x\cos x-\sin x}$.

Zbadać zbieżność szeregów:

$$171)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n^2}.$$

Stosujemy kryterjum d'Alemberta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}x^{2n+1};$$

gdy $x\geqslant 1$ szereg jest oczywiście rozbieżny, gdyż a_n nie zmierza do zera, gdy $n\to\infty$. Gdy $0<x<1$, $\frac{a_n}{a_n+1}\to 0$, i szereg jest zbieżny.

$$172)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^{n!}.$$

Stosujemy pierwsze kryterjum Cauchy'ego, przyczem badamy tylko przypadek, gdy $|x|<1$, gdyż dla $x\geqslant 1$ szereg, oczywiście, jest rozbieżny,

$$\sqrt[n]{|a_n|}=n|x|^{(n-1)!}=e^{\lg n-(n-1)!\lg\frac{1}{|x|}};$$

$$(n-1)!\lg\frac{1}{|x|}-\lg n=(n-1)!\left\{\lg\frac{1}{|x|}-\frac{\lg n}{(n-1)!}\right\}\to+\infty$$

$\lg n-(n-1)!\lg\frac{1}{|x|}\to-\infty$ i $\sqrt[n]{|a_n|}\to 0$; szereg jest więc zbieżny dla $x<1$,

173) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{n!}x^{n^2}$; dla $x\geqslant 1$ szereg jest oczywiście rozbieżny, badamy przypadek, gdy $0<x<1$;

$$\sqrt[n]{a_n}=n^{(n-1)!}\,x^n=e^{(n-1)!\lg n-n\lg\frac{1}{x}};$$

$$(n-1)!\lg n-n\lg\frac{1}{x}\to+\infty;\quad \sqrt{a_n}\to+\infty;$$

szereg i dla $|x|<1$ jest rozbieżny.

174) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{n(n-1)}{2}}x^{n^2\lg n}$; $x>0$; badamy tylko przypadek $0<x<1$, gdyż dla $x\geqslant 1$ szereg jest rozbieżny. Stosujemy drugie kryterjum Cauchy'ego.

$$-\frac{\lg a_n}{\lg n}=n^2\lg\frac{1}{x}-\frac{n(n-1)}{2}=n^2\left\{\lg\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right\};$$

gdy $\lg\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\geqslant 0$ wyrażenie $-\frac{\lg a_n}{\lg n}$ dąży do $+\infty$, a gdy $\lg\frac{1}{x}-\frac{1}{2}<0$, to $-\frac{\lg a_n}{\lg n}$ dąży do $-\infty$; a więc gdy $0<x\leqslant\frac{1}{\sqrt{e}}$, to szereg nasz jest zbieżny, gdy $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ szereg jest rozbieżny.

175) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{n(n+1)}{3}}x^{n^2\lg n}$; $x>0$.

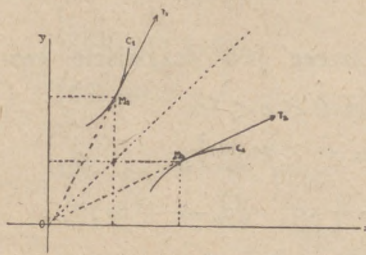
176) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\lg n}x^{(\lg n)^2}$.

177) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} n^{\frac{n}{E(\lg n)}}x^n$.

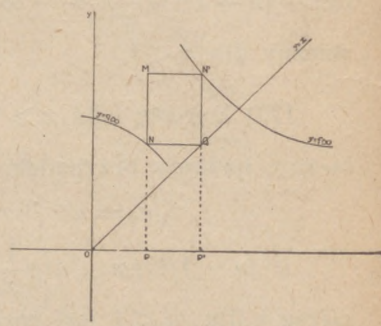
178) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\sin\frac{x}{n}$.

179) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n^2}$.

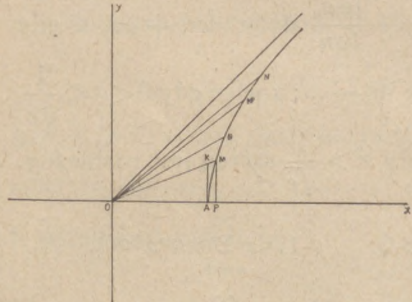
180) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\lg\left(1+\frac{x}{n}\right)$.



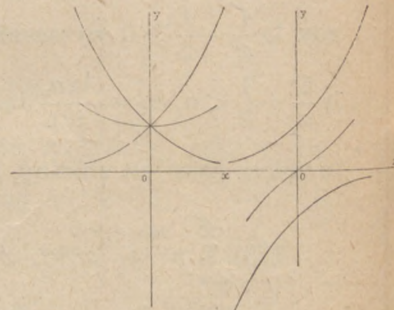
Rys. 1. (Str. 20).



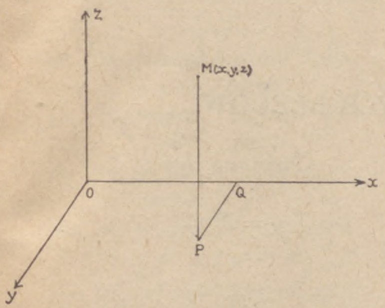
Rys. 2. (Str. 24).



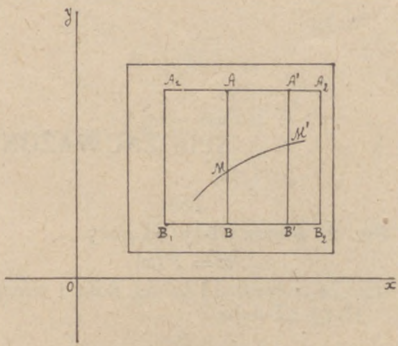
Rys. 3. (Str. 100).



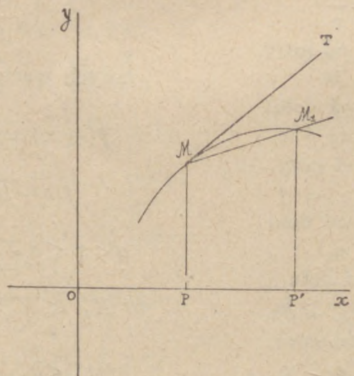
Rys. 4. (Str. 110).



Rys. 5. (Str. 120).



Rys. 6. (Str. 147).



Rys. 7. (Str. 157).

SPIS ZAUWAŻONYCH BŁĘDÓW.

	Jest	Powinno być
Str. 2, wiersz 11-ty od góry.	$x = F(x)$	$y = F(x)$
str 14, wiersz 14-ty od dołu i wiersz 11-ty od dołu.	y_2	y_1
str. 16, wiersz 13-ty od dołu.	$y = 1$	$x = 1$
str. 19, wiersz 10-ty od dołu.	$y = \operatorname{tg} y$	$x = \operatorname{tg} y$
str. 21, wiersz 13-ty od góry.	$y-$	$y-3$
str. 24, wiersz 1-y od dołu dodać:	i $y = \frac{1}{x}$	
str. 25, wiersz 11-ty od góry.	innych te	innych wartości te
str. 35, wiersz 11-ty od dołu.	$f(\pm\infty = \pm\infty)$	$f(\pm\infty) = \pm\infty$
str. 38, wiersz 9-ty od góry.	$f(x-0)$	$f(a-0)$
str. 45, wiersz 15-ty od dołu	$a < x \leqslant \eta \leqslant n$	$a < x \leqslant a + \eta \leqslant n$
str. 45, wiersz 8-y od dołu.	to $K_{\eta_1} \leqslant K_{\eta_1}$ a $k_{\eta_1} \geqslant k_{\eta_1}$,	to $K_{\eta'} \leqslant K_{\eta_1}$ a $k_{\eta'} \geqslant k_{\eta_1}$,
str. 46, wiersz 11-y od góry.	$f(x'') < k_a + \varepsilon$.	$f(x'') < k_{a+0} + \varepsilon$.
str. 47, wiersz 2-gi od dołu.	$\lvert f(x'') - f(x') \rvert < \varepsilon$.	(8) $\lvert f(x'') - f(x') \rvert < \varepsilon$,
str. 49, wiersz 2-gi od góry.	$\lvert f(x'') - f(x') \rvert < \varepsilon$	(10) $\lvert f(x'') - f(x') \rvert < \varepsilon$

Jest	Powinno być
Str. 61, wiersz 16-ty od góry.	
$f(x)-f(a)=f(x).f(x-a)\quad f(a)=$	$f(x)-f(a)=f(a).f(x-a)\quad f(a)=$
str. 61, wiersz 16-ty od dołu.	
$\frac{2}{\lvert f(a)\rvert}$	$\frac{\varepsilon}{\lvert f(a)\rvert}$
str. 65, wiersz 4-ty od dołu.	
przy jednej	przy żadnej
str. 72, wiersz 15-ty od dołu.	
$f(x_3)$	$f(x_2)$
str. 74, wiersz 4-ty od góry.	
w otoczeniu punktu a	w punkcie a
str. 84, wiersz 4-ty od góry.	
$a^{x''}-a^{x'}=(a^{x''-x'}).a^{x'}$	$a^{x''}-a^{x'}=(a^{x''-x'}-1).a^{x'}$
str. 86, wiersz 10-ty od góry.	
$(\delta_n)^{y_n}$	$(a^{\delta_n})^{y_n}$
str. 91, wiersz 8-y od dołu.	
$\mathrm{Log}_b\, a.$	$1/\mathrm{Log}_b a$
str. 94, wiersz 5-ty od góry.	
$\log\frac{z\lg a}{1+z}$	$\frac{z\lg a}{\lg(1+z)}$
str. 96, wiersz 15-ty od góry.	
x_1, y_2	x_2, y_2
str. 98, wiersz 9-ty od góry.	
$f(2\alpha)=2f(2\alpha)-1$	$f(2\alpha)=2f^2(\alpha)-1$
str. 98, wiersz 9-ty od dołu.	
$f^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\left\{f(\alpha)+1,\right.$	$f^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\left\{f(\alpha)+1\right\},$
str. 103, wiersz 16-ty od góry.	
$2S_{OM'N'}=x'y_1-x_1y';$	$2S_{OM'N'}=x'y'_1-x_1'y';$
str. 107, wiersz 10-ty od góry.	
$MPOx,$	$MP\perp Ox,$
str. 110, wiersz 8-y od góry.	
$y=\frac{1}{2},(e^x+e^{-x})$	$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$
str. 114, wiersz 6-ty od góry.	
$f\left(\frac{n\alpha}{2p}\right)=\frac{1}{1}\left(r^{\frac{u}{2p}}+r^{-\frac{n}{2p}}\right),$	$f\left(\frac{n\alpha}{2p}\right)=\frac{1}{2}\left(r^{\frac{n}{2p}}+r^{-\frac{n}{2p}}\right),$
str. 114, wiersz 11-ty od dołu.	
$f(u)=\frac{1}{2}(eku+e^{-ku})=$	$f(u)=\frac{1}{2}(e^{ku}+e^{-ku})=$

	Jest	Powinno być
Str. 116, wiersz 16-tv od dołu.	$\varphi_1(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi_2(x_2)$	$\varphi_1(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi_2(x_1)$
str. 116, wiersz 15-ty od dołu.	$(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$,	$(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1))$,
str. 116, wiersz 14-tv od dołu.	$\varphi_1(x_1)$ i $\varphi_2(x_2)$	$\varphi_1(x_1)$ i $\varphi_2(x_1)$
str 124, wiersz 14-ty od góry.	$\vert f(x', y') - g \vert < \varepsilon$.	(29) $\vert f(x', y') - g \vert < \varepsilon$.
str. 130, wiersz 1-szy od dołu.	$\lim\limits_{p \to \infty} d_{Mz_p} = 0$	$\lim\limits_{p \to \infty} d_{Mz_p} = \delta$
str. 132, wiersz 5-ty od góry.	(ζ)	(z)
str. 134, wiersz 7-my od góry.	określona w (D)	określona i ciągła w (D)
str. 134, wiersz 14-ty od góry.	będziemy zbiór punktów,	będziemy otoczeniem punktu P zbiór punktów,
str. 140, wiersz 3-ci od góry.	Podzielmy M_1	Podzielmy A_1
str. 141, wiersz 6-ty od dołu.	większy	mniejszy
str 145, wiersz 18-ty od góry.	$c_1 = \psi(a_1)$,	$b_1 = \varphi(a_1)$,
str. 151, wiersz 6-tv od góry.	$= (M)$	$= f(M)$
str. 163, wiersz 3-ci od dołu (w przypisku).	nierozróczniczkowalnych“	nieróżniczkowalnych“
str. 163, wiersz 2-gi od dołu tamże.	1614	1914
str. 168, wiersz 14-ty od dołu.	(40)	(39)
str. 175, wiersz 10-ty od dołu.	Log a	Log e
str. 180, wiersz 9-ty od dołu.	$\dfrac{1}{x_1^2 + x_1 x_2 + {}_2^2}$	$\dfrac{1}{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}$

Jest	Powinno być
Str. 182, wiersz 4-ty od dołu.	
$\frac{d\varphi_n(x)}{dx}=\frac{1}{\cos\varphi_n(x)}\cdot\frac{1}{\cos y};$	$\frac{d\varphi_n(x)}{dx}=\frac{1}{\cos\varphi_n(x)}=\frac{1}{\cos y};$
str. 183, wiersz 5-ty od dołu.	
$\frac{d\,\mathrm{Arc}\cos x}{dx}=-\frac{d\,\mathrm{Arc}\sin y}{dx}.$	$\frac{d\,\mathrm{Arc}\cos x}{dx}=-\frac{d\,\mathrm{Arc}\sin x}{dx}.$
str 184, wiersz 2-gi od góry.	
a znak *mniej*	a znak *więcej*
str. 184, wiersz 12-ty od góry.	
$\left.\frac{d\lg x}{dx}=\frac{1}{-}\right).$	$\left.\frac{d\lg x}{dx}=\frac{1}{x}\right).$
str. 185, wiersz 8-y od dołu.	
$y=e^{\alpha},{}^{lg x},$	$y=e^{\alpha\lg x},$
str. 189, wiersz 5-ty od góry.	
$k=\varphi(x+h)-(x',$	$k=\varphi(x+h)-\varphi(x),$
str. 189, wiersz 2-gi od dołu (w przypisku).	
to $0<k\leqslant\eta$	$0<h\leqslant\eta$
str. 191, wiersz 4-ty od góry.	
$dy=n(1+x^3)^{n-1}.2x\,dx;$	$dy=n(1+x^2)^{n-1}.2x\,dx;$
str. 191, wiersz 9-ty od góry.	
$dy=\frac{d\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{\cos^{2a/2}}d\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}=$	$dy=\frac{d\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}=$
str. 192, wiersz 2-gi od góry.	
$dy=\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}dx.$	$dy=\frac{\varphi'(x)}{f'(y)}dx.$
str. 192, wiersz 6-ty od góry.	
$dy=x^{'xx)},$	$y=x^{(x^x)},$
str. 192, wiersz 7-my od góry.	
$=x^x(1+\lg x)\,dx+$	$=x^x(1+\lg x).\lg x\,dx+$
str. 192, wiersz 14-ty od dołu.	
pochodnej trzeciej i t. d.	pochodnej drugiej, która jest pochodną trzecią i t. d.

	Jest	Powinno być
Str. 193, wiersz 3-ci od góry.	$d^n f(x)=f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x).(dx)^n=$ $=f^n(x).dx^n,$	$d^n f(x)=f^{(n)}(x)(dx)^n=f^{(n)}(x)dx^n$
str. 193, wiersz 1-szy od dołu.	$\dots+C_n^{n-1}.du^{n-1}.dv+$	$C_n^{n-1}d^{n-1}u.dv+$
str. 193, wiersz 2-gi od dołu.	$+C_n^1\,du\,dv^{n-1}+$	$+C_n^1\,du.d^{n-1}v+$
str. 194, wiersz 10-ty od góry.	$+(C_k^2+C_k^1)\,d^2u\,dv^{k-1}+\dots$	$+C_k^2+C_k^1)\,d^2u\,d^{k-1}v+\dots$
str. 194, wiersz 11-ty od góry.	$\dots+(C_k^p+C_k^{p-1})\,d^pu\,dv^{k-p-1}+\dots$	$\dots+(C_k^p+C_k^{p-1})\,d^pu\,d^{k-p-1}v+\dots$
str. 194, wiersz 12-ty od góry.	$\dots,C_k^p+C_k^{p-1}=C_{k-1}^p,\dots$	$\dots,C_k^p+C_k^{p-1}=C_{k+1}^p,\dots$
str. 194, wiersz 13-ty od góry.	$d^{k+1}=$	$d^{k+1}y=$
str. 194, wiersz 13-ty od góry.	$+C_{k+1}^2\,d^2u\,dv^{k-1}+\dots$	$+C_{k+1}^2\,d^2u\,d^{k-1}v+\dots$
str. 195, wiersz 3-ci od góry.	to $x'=\cos x$,	to $y'=\cos x$,
str. 195, wiersz 8-y od góry.	$y'''=\frac{2}{x^3}=x^{-3},y^{(4)}=-\frac{1.2.3}{x^4}=6x^{-4},\dots$	$y'''=\frac{2}{x^3}=2x^{-3},y^{(4)}=$ $=-\frac{1.2.3}{x^4}=-6x^{-4},\dots$
str. 196, wiersz 3-ci od góry.	$0<\|h\|\leqslant,$	$0<\|h\|\leqslant\delta,$
str. 201, wiersz 9-ty od dołu.	wtedy $f'\left(\frac{1}{2k\alpha}\right)=$	wtedy $f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right)=$
str. 207, wiersz 7-my od góry.	$y=\lg_k(-x)$;	$y=\lg_e(-x)$
str. 210, wiersz 15-ty od góry.	o ile $x\neq 0$.	o ile $x\neq x_0$.
str. 211, wiersz 16-ty od dołu.	$f(x_2)>f(x_2)$,	$f(x_1)>f(x_0)$,
str. 216, wiersz 14-ty od dołu.	między $f'''(x)$;	między $f'''(x)$ i $f(x)$;

Jest	Powinno być
Str. 218, wiersz 14-ty od dołu.	
$y = x \sin x + 1$	$y = x - \sin x + 1$
str. 222, wiersz 12-ty od góry.	
$\frac{\varphi(x) - \varphi a)}{\psi(x) - \psi(x)} =$	$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} =$
str. 224, wiersz 2-gi od góry.	
x^n	x^μ
str. 224, wiersz 6-ty od góry.	
$\ldots = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n)\lim \frac{x^{\mu-n}}{e^x} =$	$\ldots \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n)\lim \frac{x^{\mu-n}}{e^x} =$
$= \lim(x^{\mu-n}) \lim e^{-x} = 0$	$= \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots \mu-n)\lim(x^{\mu-n}).$ $\lim e \; x = 0$
str. 224, wiersz 9-ty od dołu.	
że $(\lg x)^\mu \to 0,$	że $\frac{(\lg x)^\mu}{x} \to 0,$
str. 226, wiersz 9-ty od dołu.	
$\frac{\varphi(x) - \varphi(x)}{\psi(x) - \psi(x)} =$	$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{\psi(x) - \psi(0)} =$
str. 229, wiersz 3-ci od dołu.	
$e^{-\frac{1}{a^2}}$	$e^{-\frac{1}{x^2}}$
str. 230, wiersz 1-szy od góry.	
$e^{-\frac{1}{x_1}}$	$e^{-\frac{1}{x^2}}$
str. 230, wiersz 14-ty od góry.	
x_α ,	x^α ,
str. 233, wiersz 7-y od góry.	
$e_1(x) = e^n$	$e_1(x) = e^x$
str. 233, wiersz 7-y od góry.	
$e_3(x) = e^{2(x)},\ldots$	$e_3(x) = e^{e(x)},\ldots$
str. 236, wiersz 7-y od dołu.	
$\ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-\ )}(a) + R_n,$	$\ldots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$
str. 237, wiersz 3-ci od góry.	
$\frac{x^n}{f(a+x) - f(a)} =$	$\frac{f(a+x) - f(a)}{x^n} =$
str. 239, wiersz 13-ty od góry.	
$\alpha_1, \alpha_0, \alpha_3, \ldots$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

Jest	Powinno być
Str. 243, wiersz 2-gi od dołu.	
$y' = -\frac{3x^2(x+2)}{(x^3-3x^2+4)}$	$y' = -\frac{3x^2(x+2)}{(x+1)^2(x-2)^2}$
str. 244, wiersz 1-szy od góry.	
znak tylko w punkcie $x = -2$;	znak w punktach $x = -2$ i $x = 2$;
str. 244, wiersz 8-my od góry.	
Oy	Ox
str. 244, wiersz 1-y od dołu.	
do π,	do $\frac{\pi}{2}$,
str. 245, wiersz 3-ci od góry.	
$x_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}\ x_2 = \sqrt{\frac{5}{4}}, \ldots, x_p = \sqrt{\frac{5}{2p}}$	$x_1 = \sqrt{9+\frac{5}{2}}. \ x_2 = \sqrt{9+\frac{5}{4}}, \ldots, x_p = \sqrt{9+\frac{5}{2_p}} \ldots$
str. 245, wiersz 4-ty od góry.	
$x_{-1} = \sqrt{\frac{5}{2}},\ x_{-2} = \sqrt{\frac{5}{4}}, \ldots,\ x_{-p} = \sqrt{\frac{5}{2p}} \ldots$	$x_1 = \sqrt{9-\frac{5}{2}},\ x_2 = \sqrt{9-\frac{5}{4}}, \ldots,\ x_p = \sqrt{9-\frac{5}{2_p}}, \ldots$
str. 245, wiersz 13-ty od góry.	
$y' = \frac{-10x}{(x^2-9)^2\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{(x^2-4)}{(x^2-9)}}$;	$y' = \frac{-10x}{(x^2-9)^2\cos^2\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(x^2-4)}{(x^2-9)}}\cdot\frac{\pi}{2}$;
str. 246, wiersz 1-szy od góry.	
od $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$ do	od $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}$ do
str. 246, wiersze 3-ci, 5-ty, 8-my, 9-ty od góry.	
2^p	$2p$
str. 248, wiersz 10-ty od góry.	
ustalimy,	ustalimy, np. y,
str. 249, wiersz 7-my od góry.	
$f''_y(x, y) =$	$f''_{xy}(x, y)$
str. 250, wiersz 3-ci od góry.	
$= f'_y(x, y + \theta, k)$	$= f'_y(x+h, y+\theta_1 k) - f'_y(x, y+\theta_1 k)$
str. 250, wiersz 4-ty od góry.	
$= f'_x(x\theta_1 h, y + k)$	$f'_x(x + \theta_2 h, y + k)$
str. 251, wiersz 2-gi od dołu (przypisek)	
$x+k=\varphi(t+h), y+h), y+l=\psi(t+h)$	$x+k=\varphi(t+h),\ y+l=\psi(t+h)$
str. 252, wiersz 4-ty od góry.	
$\lim\frac{l}{h} = \varphi'(t)$;	$\lim\frac{l}{h} = \psi'(t)$;

Jest	Powinno być
Str. 252, wiersz 6-ty od dołu.	
$a = t$	$x = t$
str. 254, wiersz 4-ty od góry.	
$f(x, b)$.	$f(a, b)$.
str. 255, wiersz 15-ty od góry.	
$f'_y(x, b)$.	$f'_y(a, b)$.
str. 263, wiersz 8-my od dołu.	
$\frac{1}{2!}\{f'_{x^2}(a + \theta h, b + \theta k)^2 +$	$\frac{1}{2}\{f'_{x^2}(a + \theta h, b + \theta k) h^2 +$
str. 264, wiersz 11-ty od góry.	
zależnie od wartości h i k.	Zależnie od wartości h i k, przyczem zakładamy, że C i B jednocześnie nie równają się 0.
str. 265, wiersz 7-my od dołu.	
$f(P) - (M) =$	$f(P) - f(M) =$
str. 266, wiersz 1-szy od dołu (przypisek).	
$\|\rho\|$	$\rho > 0$
str. 268, wiersz 7-my od dołu.	
$f''_{x^3} =$	$f''_{x^2} =$
str. 270, wiersz 17-ty od dołu.	
$f'_\eta(a, c) \neq 0$.	$f'_\eta(a, b) \neq 0$.
str. 270, wiersz 2-gi od dołu.	
$\varphi = 0$,	$x = 0$,
str. 271, wiersz 7-y od góry.	
$F(x, x)$	$F(x, y)$
str. 272, wiersz 15-ty od góry.	
$y_p = \Phi(x,0)\{\Phi(x, y_{p-1}) - \Phi(x,0)\} =$	$y_p = \Phi(x,0) + \{\Phi(x, y_{p-1}) - \Phi(x, 0)\} =$
str. 272, wiersz 13-y od dołu.	
(107) także $\|x_p\| < k$,	(106) także $\|y_p\| < k$,
str. 272, wiersz 2-gi od dołu.	
$\|x\| < y$	$\|x\| \leqslant \eta$
str. 273, wiersz 7-my od góry.	
$\|y_p - y_{p-4}\| < \lambda^{p-1}\|y_1\|$;	$\|y_p - y_1\| < \lambda^{p-1}\|y_1\|$;
str. 273, wiersz 9-ty od góry.	
$\|y_p - y_{p-1}\| < \lambda(1-\lambda)k$.	$\|y_p - y_{p-1}\| < \lambda^{p-1}(1-\lambda)k$.
Str. 273, wiersz 12-ty od góry.	
(102)	(107)

	Jest	Powinno być
Str. 274, wiersz 15-ty od dołu.	(105)	(104)
str. 275, wiersz 14-ty od dołu.	$y-y_0$	$y=y_0$
Str. 276, wiersz 2-gi od dołu.	$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_y(x,y,z)}{f'_z(x,y,z)}$,	$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x(x,y,z)}{f'_z(x,y,z)}$,
str. 278, wiersz 9-ty od dołu.	$Cf_2(x,y,z,u,u)+$	$Cf_1(x,y,u,v)+$
str. 278, wiersz 6-ty od dołu.	$\frac{\partial\Phi}{\partial v}=C\frac{\partial f_2}{\partial v}+$	$\frac{\partial\Phi}{\partial v}=\frac{\partial f_1}{\partial v}+$
str. 278, wiersz 5-ty od dołu.	$\frac{\partial F}{\partial u}=A\frac{\partial f_2}{\partial u}+$	$\frac{\partial F}{\partial u}=A\frac{\partial f_1}{\partial u}$
str. 279, wiersz 1-szy od dołu.	$v_2=\Phi(x,y,0,0);$	$v_2=\Phi(x,y,u_1,v_1);$
str. 280, wiersz 2-gi od dołu.	$u_p-u_{p-1}=F(x,y,u_{p-2},v_{p-2})=$	$u_p-u_{p-1}=F(x,y,u_{p-1},v_{p-1})-$ $-F(x,y,u_{p-2},v_{p-2})=$
str. 281, wiersz 6-ty od dołu.	i $\Phi(x,y,u_{p-1},v_{p-1})$,	i $v_p=\Phi(x,y,u_{p-1},v_{p-1})$,
str. 282, wiersz 8-my od góry.	$U=F(\ ,y,U,V)$,	$U=F(x,y,U,V)$,
str. 283, wiersz 9-ty od góry.	$u_4=b_1$,	$u_1=b_1$,
str. 283, wiersz 10-ty od dołu (wyznacznik).	$\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\ \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\dots$	$\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\ \frac{\partial f_2}{\partial u_2},\dots$
str. 285, wiersz 10-ty od góry.	$\alpha<h<0$,	$-\alpha<h<0$,
str. 286, wiersz 11-ty od dołu.	$0<h\eta$,	$0<h<\eta$,
str. 286, wiersz 3-ci od dołu.	$\frac{f(x+h_2)\quad f(x)}{h_1}<$	$\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}<$
Str. 287, wiersz 1-szy od góry.	$-\eta<h_2<\eta$,	$-\eta<h_2<0$,

Jest	Powinno być
Str. 289, wiersz 6-ty od góry.	
$\overline{D}_+\left(x\sin\frac{1}{x}\right)_0=+1$	$\overline{D}_+\left(x\sin\frac{1}{x}\right)_0=-1$
str. 289, wiersz 7-my od góry.	
$\overline{D}_-\left(x\sin\frac{1}{x}\right)_0=+1$	$\overline{D}_-\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=-1$
str. 293, wiersz 11-ty od dołu.	
$xe^{(n-1)x^2}-xe^{-nx_2}$	$(n-1)xe^{-(n-1)x^2}-nxe^{-nx^2}$
str. 294, wiersz 5 ty od góry.	
$\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=1\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+nx}=1,$	$\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+nx}=1,$
str. 299, wiersz 1-szy od góry.	
$s(x+0)-s_p(a+0)-s(x)+$ $+s(x)-s_p(a+0)=$	$s(a+0)-s_p(a+0)=s(a+0)-$ $-s(x)+s(x)-s_p(a+0)=$
str. 300, wiersz 13-ty od góry.	
$\sigma(a)=$	$\sigma(x)=$
str. 301, wiersz 3-ci od góry.	
$+\frac{u_{p_1+1}(x+h)-u_{p_0+1}(x)}{h}+$	$\frac{u_{p_0+1}(x+h)-u_{p_0+1}(x)}{h}+$
str. 305, wiersz 8-my od dołu.	
p_a	p_x
str. 306, wiersz 2-gi od góry.	
w punkcie x'.	w punkcie x', można znaleźć taką liczbę $l(x')>N$, że (138) $\lvert R_{l(x')}(x')\rvert<\frac{\varepsilon}{3}$.
str. 306, wiersz 6-ty od góry.	
$\lvert s_{l(x')}(x)\,s_{l(x')}-(x)\rvert$	$\lvert s_{l(x')}(x-s_{l(x')}(x')\rvert$
str. 307, wiersz 12-ty od góry.	
(141) $a,+a_1+a_2+a_3x^3+\dots$	$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$ (137)
str. 307, wiersz 6-ty od dołu.	
$\frac{u}{u_{n-1}}=$	$\frac{u_n}{u_{n-1}}=$
str. 307, wiersz 2-gi od dołu.	
$+\frac{a^3}{3!}+$	$+\frac{x^3}{3!}+$
str. 309, wiersz 3-ci od góry.	
$\dots+\frac{x^r}{l^p}+\dots$	$\dots+\frac{x^p}{l^p}+\dots$

	Jest	Powinno być
Str. 309, wiersz 5-ty, 13-ty i 14-ty od dołu.	(117)	(137)
str. 312, wiersz 1-szy od góry.	$+\frac{x^3}{3^3}+\dots$	$\dots+\frac{x^3}{3^3}+\dots$
str. 312, wiersz 9-ty od dołu.	(131)	(141)
str. 312, wiersz 8-my od dołu.	(136)	(137)
str. 313, wiersz 1-szy od dołu.	$\lim\left\|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\|=g,$	$\lim\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\|=g,$
str. 314, wiersz 2-gi i 3-ci od góry.	$\left\|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\|$	$\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\|$
str. 316. wiersz 11-ty od dołu.	$\|a_1\|, \|a_2\|^{1/3}, \|a_3\|^{1/2}, \dots$	$\|a_1\|, \|a_2\|^{1/2}, \|a_3\|^{1/3}, \dots$
str. 317, wiersz 8-my od dołu.	$2.2.4a_4+2.3.4.5.a_5+\dots$	$2.3.4.a_4+2.3.4.5a_5x+\dots$
str. 320, wiersz 2-gi od góry.	$f^{(n)}\{a+\theta(x+a)\}$.	$f^{(n)}\{a+\theta(x-a)\}$
str. 323, wiersz 9-ty od dołu.	$+\frac{x^2+2x+y^2}{2!}+$	$+\frac{x^2+2xy+y^2}{2!}+$
str. 323, wiersz 7-my od dołu.	$\frac{1}{p!}\Big(x^p+px^{p-1}+\frac{p(p-1)}{2!}x^{p-2}y+\dots$	$\frac{1}{p!}\Big(x^p+px^{p-1}y+\frac{p(p-1)}{2!}x^{p-2}y^2+$
str. 323, wiersz 4-ty od dołu.	$+\frac{1}{p}(x+y)^p+\dots$	$+\frac{1}{p!}(x+y)^p+\dots$
str. 325, wiersz 5-ty od dołu.	$\psi'_2(x)=-\psi_2(x),$	$\psi'_2(x)=-\psi_1(x),$
str. 327, wiersz 10-ty od dołu.	$+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{2^2}{3.4}\right)+\frac{2^2}{6!}\left(i-\frac{2^2}{7.8}\right)+\dots$	$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3.4}\right)+\frac{1}{6!}\left(1-\frac{1}{7.8}\right)+\dots$

Jest	Powinno być
str. 328, wiersz 12-ty od dołu.	
$\psi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\psi_2(x)+\psi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\psi_1(x)=$	$\psi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\psi_2(x)-\psi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\psi_1(x)=$
str. 330, wiersz 5-ty od góry.	
$R_n=\frac{(-1)^{n-1}}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$	$R_n=\frac{(-1)^{n-1}x^n}{1+\theta x}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$
str. 332, wiersz 6-ty od dołu (w przyp.)	
$\frac{3}{n^3-3n}$	$\frac{2}{n^3-3n}$
str. 333, wiersz 11-ty od dołu.	
$\frac{\lvert u_{p+1}\rvert}{\lvert u_p\rvert}=\frac{m-p}{p+1};$	$\frac{\lvert u_{p+1}\rvert}{\lvert u_p\rvert}=\frac{m-p}{p+1}x;$
str. 336, wiersz 5-ty od góry.	
$u_{p_0}\to\infty,$	$\frac{u_{p_0}}{u_p}\to\infty,$
str. 339, wiersz 9-ty od góry.	
$-\frac{\pi}{2}>\alpha<\frac{\pi}{2}.\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ i	$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$ i
str. 346, wiersz 8-my od góry.	
$\theta-1$	$\theta=1$
str. 346, wiersz 11-ty od dołu.	
$(1-\eta)<x<\rho.$	$\rho(1-\eta)<x<\rho.$
str. 347, wiersz 12-ty od dołu.	
$\lim_{n\to\infty}(a_0+a_1\rho+a_2\rho^2+..);$	$\lim_{n\to\infty}(a_0+a_1\rho+a_2\rho^2+...+a_n\rho^n);$
str. 349, wiersz 12-ty od dołu.	
$\rho(0)=0$	$a_0=0$
str. 349, wiersz 7-my od dołu.	
$<a_p(r)+$	$<\varphi_p(r)+$
str. 351, wiersz 7-my od góry.	
$\operatorname{tang} x=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9.}+..\right)$	$\operatorname{tang} x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-...\right)$
str. 351, wiersz 8-my od góry.	
$=x+\frac{1}{3}+x^3+$	$=x+\frac{x^3}{3}+$